Notes du 10.9.1968

TAPIS DE QUILLEN[1]
par A GROTHENDIECK

I. Relation entre catégories et ensembles semi-simpliciaux

A toute catégorie C, on associe un ensemble semi-simplicial $S(C)$, trouvant ainsi un foncteur pleinement fidèle

$$S : \mathrm{Cat} \longrightarrow \mathrm{Ssimpl}\,.$$

Les systèmes locaux d'ensemble sur SC correspondent aux foncteurs sur C qui transforment toute flèche en isomorphisme (i.e. qui se factorisent par le groupoïde associé à C). Les H^i sur SC d'un tel système local (H^0 pour ensembles, H^1 pour groupes, H^i quelconques pour groupes abéliens) s'interprètent en termes des foncteurs $\varprojlim^{(i)}$ dérivés de $\varprojlim$, ou si on préfère, des H^i (du *topos* C). On voit ainsi à quelle condition un foncteur $C \longrightarrow C'$ induit un homotopisme $SC \longrightarrow SC'$: en vertu du critère cohomologique de Artin-Mazur, il f et s que pour tout système de coefficients F' sur C', l'homomorphisme naturel $\varprojlim^{(i)}_{C'} F' \longrightarrow \varprojlim^{(i)}_{C} F$ soit un isomorphisme (pour les i pour lesquels cela a un sens).

A C on peut associer le topos $\widetilde{C}$, qui varie de façon *covariante* avec C. (NB le foncteur $C \mapsto \widetilde{C}$ n'a plus rien de pleinement fidèle, semble-t-il ??).

Les systèmes de coefficients ensemblistes sur C ($\overset{\text{def}}{=}$ les foncteurs $C^\circ \longrightarrow \mathrm{Ens}$ transformant isomorphismes en isomorphismes) correspondent aux faisceaux localement constants i.e. les objets localement constants de $\widetilde{C}$, définis intrinsèquement en termes de $\widetilde{C}$. Ainsi, le fait pour un foncteur $F : C \longrightarrow C'$

[1]Ce texte a été transcrit par Mateo Carmona
https://agrothendieck.github.io/

d'induire une homotopisme $S(C) \longrightarrow S(C')$ ne dépend que du morphisme de topos $\widetilde{F} : \widetilde{C} \longrightarrow \widetilde{C'}$ induit, et signifie que pour tout faisceau localement constant F' sur C' i.e. sur $\widetilde{C'}$, les applications induites $\mathrm{H}^i(\widetilde{C'}, F') \longrightarrow \mathrm{H}^i(\widetilde{C}, \widetilde{F}^*(F'))$ sont des isomorphismes (pour les i pour lesquels cela a un sens).

On a aussi un foncteur évident

$$T : \mathrm{Ssimpl} \longrightarrow \mathrm{Cat},$$

en associant à tout ensemble semi-simplicial X la catégorie $T(X) = \Delta_{/X}$ des simplexes sur X, dont l'ensemble des objets est la réunion disjointe des X_n... (c'est une catégorie fibrée sur la catégorie Δ des simplexes types, à fibres les catégories discrètes définies par les X_n). Ceci posé, Quillen prouve que pour tout X, $ST(X)$ est isomorphe canoniquement à X dans la catégorie homotopique construite avec Ssimpl, et que pour toute C, la catégorie $TS(C)$ est canoniquement "homotopiquement équivalente à C" i.e. canoniquement isomorphe a C dans la catégorie quotient de Cat obtenue en inversant les foncteurs qui sont des homotopismes. Ces isomorphismes sont fonctoriels en X. Il en résulte formellement qu'un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ dans Ssimpl est un homotopisme si et seulement si en est ainsi de $T(f) : T(X) \longrightarrow T(Y)$, d'où des foncteurs $S' : \mathrm{Cat}' \longrightarrow \mathrm{Ssimpl}'$ et $T' : \mathrm{Ssimpl}' \longrightarrow \mathrm{Cat}'$ entre les catégories "homotopiques", construites avec Cat resp Ssimpl, qui sont quasi-inverses l'un de l'autre.

De plus, Quillen contruit un isomorphisme canonique et fonctoriel dans Cat' entre C et la catégorie opposée C°, ou ce qui revient au même, un isomorphisme canonique et fonctoriel dans Ssimpl' entre $S(C)$ et $S(C^\circ)$. La définition est telle que le foncteur induit sur les systèmes locaux sur C transforme le foncteur contravariant F sur C, transformant toute flèche en flèche inversible, en le foncteur covariant (i.e. contravariant sur C°) ayant mêmes valeurs sur les objets, et obtenu sur les flèches en remplaçant $F(u)$ par $F(u)^{-1}$; en d'autres termes, l'effet de l'homotopisme de Quillen sur les groupoïdes fondamentaux est l'isomorphisme évident entre les groupoïdes fondamentaux de C et de C°, compte tenu que le deuxième est l'opposé du premier. Comme application, Quillen obtient une interprétation faisceautique de la cohomologie d'un ensemble semi-simplicial à coefficients dans un système local covariant F (défini classiquement par le complexe cosimplicial des $C^n(F) = \amalg_{x \in X_n} F(x)$): on considère le système local contravariant défini par F, on l'interprète comme un faisceau sur $T(X)$ i.e. objet de $\mathrm{Ssimpl}_{/X}$, et on prend sa cohomologie. - Cependant, quand F est un système de coefficients covariant pas nécessairement local, on n'a toujours pas d'interprétation de ses groupes de cohomologie classiques en termes faisceautiques; ni, lorsque F est contravariant, de son homologie, ou inversement de sa cohomologie faisceautique en termes classiques.

A propos de la notion de foncteur qui est un homotopisme. Quillen montre qu'un tel foncteur $F : C \longrightarrow C'$ induit une équivalence entre la sous-catégorie triangulée $\mathrm{D}^b_{lc}(C')$ de la catégorie dérivée bornée de celle des faisceaux abéliens sur C', dont les faisceaux de cohomologie sont des systèmes locaux, et la catégorie analogue pour C; et réciproquement. On peut dans cet énoncé introduire aussi n'importe quel anneau de base (à condition de le supposer $\neq 0$ dans le cas de la réciproque); la partie dire vaut aussi avec un anneau de coefficients par nécessairement constant, mains constant tordu. Je pense que ce résultat (facile) doit pouvoir se généraliser ainsi.

Soit $f : X \longrightarrow X'$ un morphisme de topos qui soit tel que pour tout faisceau localement constant sur X', f induise un isomorphisme sur les cohomologies (avec cas non commutatif inclus). Supposons que X et X' soit *localement homotopiquement trivial*, i.e. que pour tout entier $n \geq 1$, tout objet U ait un recouvrement par des $U_i \longrightarrow U$, tels que a) tout système local sur U devient constant sur U_i, et toute section sur U devient constant sur U_i et b) pour tout groupe abélien G, les $\mathrm{H}^j(U, G) \longrightarrow \mathrm{H}^j(U_i, G)$ sont nuls pour $1 \leq j \leq n$ [2]. Alors le foncteur $\mathrm{D}^b_{lc}(X') \longrightarrow \mathrm{D}^b_{lc}(X)$ induit par f est une équivalence. Même énoncé si on met dans le coup un système local d'anneaux sur X'. Enfin, f induit une équivalence entre la catégorie des coefficients locaux sur C et celle des coefficients locaux sur C'.

II. n-catégories, catégories n-uples, et Gr-catégories

III. Point de vue "motivique" en théorie du cobordisme

[2]Attention, cette condition n'est typiquement pas satisfaite par les schémas sur []