Annals of Mathematics
Vol. 71, No. 2, March, 1960
Printed in Japan

ANALOGUES KÄHLÉRIENS DE CERTAINES CONJECTURES DE WEIL

Par Jean-Pierre Serre

(extrait d'une lettre à A. Weil, 9 Nov. 1959)

··· Au congrès d'Amsterdam, en 1954, tu as indiqué une démonstration par voie transcendante de la "formule de Castelnuovo" $\sigma(\xi \circ \xi') > 0$. En fait, un procédé analogue, basé sur la théorie de Hodge, s'applique aux variétés de dimension quelconque, et l'on obtient à la fois la positivité de certaines traces, et la détermination des valeurs absolues de certaines valeurs propres, en parfaite analogie avec tes chères conjectures sur les fonctions zêta.

Le résultat sur les valeurs propres est celui qui s'énonce le plus simplement:

Théorème 1. *Soit V une variété projective irréductible, non singulière, définie sur le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes, et soit $f: V \to V$ un morphisme de V dans elle-même. Supposons qu'il existe un entier $q > 0$ et une section hyperplane E de V tels que le diviseur $f^{-1}(E)$ soit algébriquement équivalent à $q \cdot E$. Alors, pour tout entier $r \geqq 0$, les valeurs propres de l'endomorphisme f_r^* de $H^r(V, \mathbf{C})$ défini par f ont pour valeur absolue $q^{r/2}$.*

(Note que, si l'on remplace $\mathbf{C}$ par un corps fini $\mathbf{F}_q$ et f par le morphisme de Frobenius correspondant, le diviseur $f^{-1}(E)$ est équivalent à $q \cdot E$; le Théorème 1 est donc bien l'analogue kählérien de "l'hypothèse de Riemann".)

Soit $H(V)$ l'algèbre de cohomologie de V, somme directe des $H^r(V, \mathbf{C})$, $r \geqq 0$, et soit $\mathbf{u} \in H^2(V, \mathbf{C})$ la classe de cohomologie définie par le diviseur E; avec les notations de tes *Variétés Kählériennes* (citées VK dans ce qui suit), la classe $\mathbf{u}$ est une classe *de type kählérien*, et l'on a $f_2^*(\mathbf{u}) = q \cdot \mathbf{u}$. Pour tout $r \geqq 0$, posons:

$$g_r = q^{-r/2} f_r^* ,$$

et soit g l'endomorphisme de $H(V)$ défini par les g_r. De même que f^*, l'endomorphisme g est un endomorphisme *d'algèbre*, compatible avec la structure *bigraduée* de $H(V)$, et c'est un opérateur *réel* (VK, Chap. IV, § 5); enfin, on a $g(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$. Si $n = \dim. V$, on a $g(\mathbf{u}^n) = \mathbf{u}^n$ et puisque la classe fondamentale $\mathbf{v}$ de V est un multiple de $\mathbf{u}^n$, on a $g(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$; comme g est un endomorphisme d'algèbre, il s'ensuit que g conserve le *produit scalaire* $I(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ de deux classes de cohomologie de dimensions complémen-

This content downloaded from 157.89.65.129 on Thu, 20 Nov 2014 20:26:49 PM
All use subject to JSTOR Terms and Conditions

taires (VK, Chap. IV, § 7). Munissons alors $H^r(V, \mathbf{C})$ de la forme sesquilinéaire

$$T_V(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = A(\mathbf{a}, C\bar{\mathbf{b}}) ,$$

les notations étant celles de VK, p. 77–78. Les formules établies à cet endroit montrent que T_V est une *forme hermitienne positive non dégénérée*; de plus, elle est déterminée de façon unique par la connaissance de l'algèbre bigraduée $H(V)$, munie du produit scalaire $I(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, et des opérateurs $\mathbf{a} \to \bar{\mathbf{a}}$ et $\mathbf{a} \to \mathbf{u} \cdot \mathbf{a}$. Comme g respecte ces diverses structures, g respecte aussi T_V, autrement dit c'est un opérateur *unitaire*; les valeurs propres de g ont donc une valeur absolue égale à 1, ce qui démontre le Théorème 1.

Observe également que g_r et g_{2n-r} sont transposés l'un de l'autre par rapport à la forme bilinéaire $I(\mathbf{a}, \mathbf{b})$; si les valeurs propres de f_r^* sont $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$, celles de f_{2n-r}^* sont donc $q^n/\lambda_1, \cdots, q^n/\lambda_k$; c'est l'analogue kählérien de "l'équation fonctionnelle" de la fonction zêta.

Je passe maintenant aux correspondances, et à la généralisation de la formule $\sigma(\xi \circ \xi') > 0$. Pour éviter des difficultés inessentielles, je prendrai le terme de "correspondance" en un sens purement homologique: si V et W sont deux variétés kählériennes compactes connexes, de dimension n, une correspondance X de V dans W est une application $\mathbf{C}$-linéaire $H(V) \to H(W)$ qui respecte les bidegrés, et commute à la conjugaison (autrement dit, c'est un opérateur *réel*); un tel X correspond à une classe de cohomologie réelle de type (n, n) de $V \times W$.

Soit $\mathbf{u}_V \in H^2(V, \mathbf{C})$ la classe de cohomologie définie par la structure kählérienne de V, et soit L_V l'endomorphisme $\mathbf{a} \to \mathbf{u}_V \cdot \mathbf{a}$ de $H(V)$; définition analogue pour L_W. Je dirai que *la correspondance X est compatible avec les structures kählériennes de V et W* (dans le cas algébrique, il faudrait parler de *polarisations*) si la condition suivante est vérifiée:

(c) *Pour tout couple d'entiers $r, s \geqq 0$, X applique $L_V^r(\mathrm{Ker}\, L_V^s)$ dans $L_W^r(\mathrm{Ker}\, L_W^s)$.*

Il revient au même de dire que X est compatible avec les décompositions de Hodge des espaces $H(V)$ et $H(W)$, cf. VK, p. 76.

Soit maintenant ${}^tX \colon H(W) \to H(V)$ la *transposée* de X par rapport à la dualité de Poincaré; la décomposition de Hodge étant auto-duale, ${}^tX$ vérifie également (c). Pour tout entier r, notons X_r et ${}^tX_r$ les restrictions de X et ${}^tX$ à $H^r(V, \mathbf{C})$ et $H^r(W, \mathbf{C})$; si $r \leqq n$, on sait que $L_V^{n-r} \colon H^r(V, \mathbf{C}) \to H^{2n-r}(V, \mathbf{C})$ est un isomorphisme; notons L_V^{r-n} l'isomorphisme réciproque. Pour tout entier $r, 0 \leqq r \leqq 2n$, on peut alors définir une application linéaire

This content downloaded from 157.89.65.129 on Thu, 20 Nov 2014 20:26:49 PM
All use subject to JSTOR Terms and Conditions

$$X'_r : H^r(W, \mathbf{C}) \to H^r(V, \mathbf{C})$$

par la formule:

$$X'_r = L_V^{r-n} \circ {}^tX_{2n-r} \circ L_W^{n-r} .$$

C'est l'opérateur X'_r qui joue le rôle du ξ' de la formule de Castelnuovo. On a en effet:

THÉORÈME 2. *Soient V et W deux variétés kählériennes connexes de même dimension, et soit X une correspondance compatible avec les structures kählériennes de V et de W. Pour tout entier r, on a alors*

$$\operatorname{Tr}(X_r \circ X'_r) \geqq 0;$$

de plus, si $\operatorname{Tr}(X_r \circ X'_r) = 0$, *on a* $X_r = 0$.

Munissons $H^r(V, \mathbf{C})$ de la forme hermitienne $T_V(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ introduite plus haut, et faisons de même pour $H^r(W; \mathbf{C})$. Un calcul simple (où la condition (c) joue un rôle essentiel) montre que les opérateurs $X_r : H^r(V, \mathbf{C}) \to H^r(W, \mathbf{C})$ et $X'_r : H^r(W, \mathbf{C}) \to H^r(V, \mathbf{C})$ sont *adjoints* l'un de l'autre par rapport aux formes T_V et T_W. La trace de $X_r \circ X'_r$ n'est donc pas autre chose que le *carré de la norme* (au sens d'Hilbert-Schmidt) *de l'opérateur* X_r, et le Théorème 2 résulte évidemment de là.

Bien entendu, le Théorème 2 redonne le Théorème 1: il suffit de l'appliquer aux correspondances de l'anneau engendré par $X = f^*$, en tenant compte des formules $X \circ {}^tX = {}^tX \circ X = q^n$; le raisonnement est identique à celui que tu fais dans tes *Courbes Algébriques* pour déduire "l'hypothèse de Riemann" de la formule $\sigma(\xi \circ \xi') > 0$.

Observe également que, si l'on prend $r = 1$, l'hypothèse (c) est superflue (la décomposition de Hodge de H^1 étant triviale), et l'on obtient ainsi, sans restriction sur X, la positivité de $\operatorname{Tr}(X_1 \circ X'_1)$; c'est là un résultat essentiellement équivalent au Th. 7, p. 137, de VK. Pour $r \geqq 2$, l'hypothèse (c) est par contre essentielle.

INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY

This content downloaded from 157.89.65.129 on Thu, 20 Nov 2014 20:26:49 PM
All use subject to JSTOR Terms and Conditions