Jacobiennes généralisées globales relatives

C. CONTOU-CARRÈRE

Introduction

Le résultat principal de ce travail est la construction des jacobiennes généralisées $((J_n^{\cdot})(n \geq 0), (\Phi_n)(n \geq 0))$ pour une S-courbe relative X, munie d'une compactification convenable, et de l'isomorphisme

$$\varinjlim_{n} \operatorname{Hom}_{S-gr}(J_n^{\cdot}, G) \simeq G(X),$$

pour tout S-schéma en groupes commutatif et lisse G. L'énoncé de ce résultat est donné sous forme conjecturale dans une lettre du 9/8/1960 adressée par A. Grothendieck à J.P. Serre. On obtient ainsi l'extension naturelle au cas relatif de la théorie de Rosenlicht-Serre, et on achève la première étape d'un programme de travail proposé à l'auteur par A. Grothendieck. Il s'agit d'établir une formule de dualité générale pour une courbe relative lisse X à coefficients dans un S-schéma en groupes G commutatif et plat, qui doit correspondre à celle prouveée dans [15], Exp. n°XVIII, dans le cas d'une courbe relative propre et lisse. L'aspect local de cette formule mène à la construction des jacobiennes locales des courbes formelles, et à leur propriété de factorisation universelle (cf. [3] bis) qui étend la théorie des symboles locaux au cas relatif.

La méthode de démonstration suivie (imposée par des raisons techniques) cache quelque peu les idées géométriques. Dans le n°1, on précise la définition, avec laquelle on travaille, de courbe relative lisse X au-dessus d'un schéma S, munie d'une compactification $(\widehat{X}, T)$, où $\widehat{X}$ désigne une S-courbe relative propre et T un diviseur relatif de $\widehat{X}$. Dans le n°2, on donne la construction de la contraction de la S-courbe $\widehat{X}$ le long d'un diviseur relatif D, en termes d'une somme amalgamée $X \coprod_D S$. On étend ainsi à la situation relative la construction de [16], page 70. Dans le n°3, on construit un système projectif de S-schémas en groupes $J_n^{\cdot}$ en posant pour tout entier $n \geq 0$

$$J_n^{\cdot} = \underline{\operatorname{Pic}}_{\widehat{X}^{(n)}/S} = R^1 f_*^{(n)}(\mathbb{G}_{m\widehat{X}^{(n)}}).$$

avec $\widehat{X}_{(n)} = \widehat{X} \coprod_{T^{(n)}} S$, où $T^{(n)}$ désigne la voisinage infinitesimal n-ème de T dans $\widehat{X}$, et $f^{(n)} : \widehat{X}^{(n)} \longrightarrow S$ le morphisme structural. On donne aussi la construction d'un morphisme d'Abel-Jacobi $\Phi_n : x \to J_n^{\cdot}$ (resp. $\Phi = \varprojlim_n \Phi_n$). Dans le n°4 on énonce le résultat principal (Théorème (4.1)) qui exprime la propriété de factorisation universelle du couple $(J^{\cdot}, \Phi)$ par rapport aux sections d'un S-schéma G en groupes, lisse au-dessus de X. (Le couple $(J^{\cdot}, \Phi)$ tient lieu de jacobienne généralisée relative de la S-courbe lisse X). Ensuite, en prenant comme point de départ la théorie des corps de classes telle qu'elle est donnée par J.P. Serre dans [16], on démontre le Théorème (4.1) dans le cas d'une base noethérienne réduite. Finalement, on ramène la preuve au cas d'une base affine et noethérienne $S = \operatorname{Spec} A$. Dans le n°5 on procède à la démonstration dans ce cas-ci, par récurrence sur la longueur d'une suite de composition $I_{m+1} \subset I_m \subset \ldots \subset I_0 = N$ du radical N de A, tel que : pour tout $0 \leq i \leq m$, il existe un idéal premier P_i tel que $I_i/I_{i+1} \simeq A/P_i$, et $I_i^2 \subset I_{i+1}$ (cf. (5.1)). On est ramené à étudier les prolongements infinitésimaux d'un S_0-homomorphisme

$$h_0 : J^{\cdot} \times_S S_0 = J_0^{\cdot} \to G_0 = G \times_S S_0,$$

où $S_0 = \operatorname{Spec} A/I$, où I est un idéal de carré nul ($I^2 = 0$), tel qu'il existe un idéal premier P de A avec $I \simeq A/P$ (en tant que A-modules), et G un S-schéma en groupes lisse, en un S-homomorphisme $h : J^{\cdot} \to G$. La théorie des obstructions infinitésimales fournit une extension E de $J_0^{\cdot}$ par un S-faisceau en groupes de Zariski L telle que : "E est scindée si et seulement si h_0 admet un prolongement $h : J^{\cdot} \to G$ qui soit un S-homomorphisme". D'autre part, il existe un groupe vectoriel $W(N)$, où N désigne un $\mathcal{O}_{S_0}$-module donnée par un A-module de la forme $A/P \times \ldots \times A/P$, et dont la restriction à la sous-catégorie pleine C_{S_0} de $\mathrm{Sch}|_{S_0}$ des S_0-schémas plats coïncide avec celle de L à C_{S_0}. Une description de E en tant que L-torseur de Zariski au-dessus de $J_0^{\cdot}$ muni d'une donnée de structure supplémentaire, permet de construire une autre extension E' de $J_0^{\cdot}$ par $W(N)$, dont la restriction à C_{S_0} coïncide avec celle de E à C_{S_0}, donc telle que E soit scindée si et seulement si E' l'est (Le S_0-schéma en groupes $J_0^{\cdot}$ étant plat). Posons $S_0' = \operatorname{Spec} A/P$. On a alors que : la fibre $E'_{S_0'}$ de E' est un S_0'-groupe représentable (en tant qu'extension de $J_0^{\cdot}$ par $\mathbb{G}_a \times \ldots \times \mathbb{G}_a$), et $E'_{S_0'}$ est scindée grâce à la propriété universelle de $(J_0^{\cdot}, \Phi_0)$.

L'hypothèse ⟨⟨ G lisse sur S ⟩⟩ ne paraît pas nécessaire. En fait, la méthode de démonstration suivie semble adaptable au cas où G est plat et de présentation finie. Alors la théorie du complexe contangent relatif fournit deux obstructions au relèvement infinitésimal d'une factorisation d'une section $\psi \in G(X)$, et il doit être possible de prouver leur trivialité. L'idée géométrique essentielle pour montrer (*) est la considération de familles F de diviseurs relatifs d'une courbe relative $\widehat{X}$, munie d'un diviseur D

de Cartier, linéairement équivalents au sens de Rosenlicht, par rapport à un n-voisinage infinitésimal de D, fibrés au-dessus d'un sous-espace ouvert U d'un espace projectif P, complémentaire d'un hyperplan H de P. Ensuite, l'étude de la section ψ_F induite par une section ψ de G au-dessus du complémentaire X de D dans $\widehat{X}$, et celle du comportement de la trace $\mathrm{tr}(\psi_F)$ par rapport au morphisme fini $F \to U$, autour de H. (cf. proposition 9, p. 47 de [15], Exp. XVIII et l'avatar local de la proposition 9, le lemme (5.2) de [2]).

L'auteur dédie ce travail à Alexandre Grothendieck, en témoignage d'amitié et de reconnaissance pour tout ce qu'il a reçu de lui.

1. Définition d'une S-courbe lisse munie d'une compactification

Soit S un schéma. Soit $\widehat{X} \xrightarrow{f} S$ un S-schéma de présentation finie, localement projectif sur S, et à fibres géométriques intègres de dimension 1. Soit

$$T \subset \widehat{X} \tag{1.1}$$

un S-sous schéma fermé de $\widehat{X}$, plat sur S, et tel que l'idéal de définition $J_{T/\widehat{X}}$ de T dans $\widehat{X}$ soit inversible, c'est-à-dire engendré localement par une section f de $O_{\widehat{X}}$ non-diviseur de zéro (Diviseur de Cartier relatif). On pose

$$X = \widehat{X} - T \tag{1.2}$$

et on suppose que X et un S-schéma lisse. Dans le cas où $S = \mathrm{Spec}(A)$ la méthode de la présentation finie (cf. [13], page 7) permet d'effectuer les réductions suivantes. On peut exprimer S comme une limite projective de schémas affines noethériens

$$S = \varprojlim_{j \in L} S_j, \tag{1.3}$$

où $S_j = \mathrm{Spec}\, A_j$, et $A_j \subset A$ désigne une $\mathbb{Z}$-algèbre de type fini, de manière à ce que la limite inductive $\varinjlim_j A_j$ soit égale à A. Au système projectif $(S_j)_{j \in L}$ il correspond un système projectif $(\widehat{X}_j)_{j \in L}$, où $\widehat{X}_j$ désigne un S_j-schéma de présentation finie, localement projectif sur S_j, muni d'un diviseur de Cartier relatif T_j, et tel que

$$\widehat{X} = \varprojlim_{j \in L} \widehat{X}_j \tag{1.4}$$

et

$$\widehat{X} = \widehat{X}_j \times_{S_j} S. \tag{1.5}$$

Pour j assez grand, $\widehat{X}_j$ est un S_j-schéma plat et $X_j = \widehat{X}_j - T$ est lisse sur S_j. A partir de (1.5) et du fait que $\widehat{X}_j$ est plat sur S_j on conclut que $\widehat{X}_j$ est à fibres géométriques intègres.

Remarque 1.6. Lorsque $T \to S$ est surjectif et $\widehat{X} \to S$ est supposé propre $\widehat{X}$ est localement projectif sur S. En effet, soit $s \in S$; il est facile de voir qu'il existe un entier n assez grand pour que $(J^{-n}_{T/\widehat{X}})_s$ soit un $O_{\widehat{X}_s}$-module ample. D'autre part, on peut supposer S noethérien, et d'après le critère d'amplitude (cf. [10], page 145), il existe un voisinage U de s tel que la restriction de $J^{-n}_{T/\widehat{X}}$ à U soit un $O_{\widehat{X}_U}$-module ample.

La proposition suivante donne des propriétés d'un diviseur de Cartier relatif utiles par la suite.

Proposition 1.7. *Soit $Y \xrightarrow{f} S$ un morphisme localement de présentation finie. Soit I un idéal cohérent sur Y. Soient $D = V(I)$ le S-sous-schéma définis par I, $y \in D$ et $s = f(y)$. Let conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *I est inversible en y (c.à.d. I_y est engendré par un élément non-diviseur de zéro de $O_{Y,y}$) et D est plat sur S en y.*

(b) Y est plat sur S en y, et I_y est engendré par un élément f_y induisant sur la fibre Y_s un germe non-diviseur de zéro.

Preuve. On se ramène à une situation locale. L'hypothèse permet de supposer que :

(i) $S = \operatorname{Spec} A$ et $Y = \operatorname{Spec} B$, où A et B ont des anneaux locaux noethériens ;

(ii) Le point s (resp. y) est donné par l'idéal maximal m de A (resp. m_B de B).

Soient $A \to B$ l'homomorphisme local donné par f, et $I \subset B$ l'idéal correspondant à D. Montrons que (a)$\Longrightarrow$(b). En effet, comme B/I est plat sur A et que I est engendré par un élément régulier f de B, pour tout $n \in N$ la A-algèbre B/I^{n+1} est plate. Il en résulte que B est plat sur A (cf. [10], page 19 proposition (10.2.6)). L'exactitude de la suite

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{f} B \longrightarrow B/fB \longrightarrow 0$$

et $\mathrm{Tor}_1^A(B/fB, A/m) = 0$ donnent que f induit sur la fibre B/mB un germe non-diviseur de zéro.

Supposons maintenant B plate sur A et $I = (f)$ tel que f induit un non-diviseur de zéro sur B/mB. Alors f induit un non-diviseur de zéro dans $B/m^{n+1}B (n \in \mathbb{N})$, donc que f est non-diviseur de zéro dans B. La suite exacte des Tor_i^A obtenue à partir de la suite exacte

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{f} B \longrightarrow B/fB \longrightarrow 0$$

et de A/m, et l'injectivité de la flèche $B/mB \rightarrow B/mB$ induite par f, entraînent que

$$\mathrm{Tor}_1^A(B/fB, A/m) = 0.$$

D'autre part $B/fB \otimes_A A/m$ est A/m-plat (A/m étant un corps). Le critère local de platitude ([10], page 18) prouve que B/fB est A-plat ; on a alors (b)$\Longrightarrow$(a). c.q.f.d.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$T^{(n)} = V(J^{n+1}_{T/\widehat{X}}). \tag{1.8}$$

2. Contraction de la S -courbe $\widehat{X}$ le long du diviseur de Cartier relatif $T^{(n)}$.

On étend ici à la situation relative la construction de J.P. Serre (cf. [16], page 70) associant à une courbe Y sur un corps K, et à un K-diviseur D de Y, une courbe Y' et un K-morphisme $Y \xrightarrow{q} Y'$ tels que l'image de D par q soit un point de Y'.

On note Y un S-schéma plat de présentation finie, et $D = V(J)$ un diviseur de Cartier relatif défini par l'idéal $J \subset O_Y$.

Définition 2.1. *Soit* $Y \coprod_D S$ *(somme amalgamée de* Y *avec* S *le long de* D*), le* S*-foncteur covariant défini par*

$$\mathrm{Hom}(Y \coprod_D S, Z) = \mathrm{Ker}\,[\mathrm{Hom}_S(Y,Z) \times \mathrm{Hom}_S(S,Z) \rightrightarrows \mathrm{Hom}_S(D,Z)]$$

où $Z \in \mathrm{ob\ Sch}|_S$.

Etant donné $Z \in \mathrm{ob\ Sch}|_X$, on a un faisceau *fpqc* $\mathrm{Hom}_S(Y \coprod_D S, Z)$. La question de la représentabilité de $Y \coprod_D S$ est alors ramenée au cas où S

est affine. Soient $S = \operatorname{Spec} A$ et $Y = \operatorname{Spec} B$, où B désigne une A-algèbre fidèlement plate de présentation finie. Soit $I \subset B$ l'idéal qui correspond à $J \subset O_Y$. On suppose que B/I est fidèlement plate sur A. Posons

$$B' = \ker [B \times A \rightrightarrows B/I]. \tag{2.2}$$

Alors B' est une A-algèbre fidèlement plate. En effet on a une suite exacte de A-modules

$$0 \to B' \to B \times A \to B/I \to 0$$

avec des A-modules plats $B \times A$ et B/I, donc B' est une A-algèbre plate. Comme B/I est une A-algèbre fidèlement plate on a les inclusions $A \hookrightarrow B$ et $A \hookrightarrow B/I$. Alors $A \cap I = 0$. Le A-sous-module de B donné par la somme directe $A \oplus I \subset B$ est en fait une A-sous-algèbre. On vérifie que le A-homomorphisme canonique $B' \to B$ est injectif et que son image est égale à $A \oplus I$. D'où il résulte que B' est fidèlement plate.

Notons $I' \subset B'$ l'idéal défini par $I \subset A + I$. Par construction de B', on a un A-homomorphisme $B' \to A$ tel que le composé $A \to B' \to A$ soit égal à l'identité. Posons

$$Y' = \operatorname{Spec}\ B'. \tag{2.3}$$

On a alors une section

$$\epsilon : S \longrightarrow Y', \tag{2.4}$$

dont l'image est le sous-schéma $V(I')$ de Y' . Le A-homomorphisme canofnique $B' \to B$ donne lieu à un S-morphisme de schémas

$$Y \xrightarrow{q} Y'. \tag{2.5}$$

Montrons que le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, hook] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ S \arrow[r] & Y' \end{tikzcd} \tag{2.6}$$

est cartésien, c'est-à-dire que $Y \times_{Y'} S = D$. Or prouver cette égalité revient à vérifier que

$$B \otimes_{B'} (B'/I') = B/I,$$

ce qui est immédiat car $I'B = I$.

Proposition 2.7. *Avec les notations et les hypothèses ci-dessus, le morphisme $q : Y \to Y'$ induit un isomorphisme*

$$Y - D = Y - V(I) \simeq Y' - V(I').$$

Preuve. Etant donné $f \in I$, on a un isomorphisme de A-algèbres

$$(*) \qquad B'_f \to B_f$$

induit par $B' \to B$. En effet, soit x un élément de la A-algèbre B ; on a $fx \in B' = A + I$, donc $x/1$ appartient à l'image de (*), ce qui montre bien que (*) est un isomorphisme. Ainsi chaque point y de $Y' - V(I')$ admet un voisinage ouvert $U = U(f)$ de la forme Spec (B'_f) avec $f \in I$, tel que

$$q|q^{-1}(U) : q^{-1}(U) \longrightarrow U$$

soit un isomorphisme. Comme, d'autre part, les ouverts $D(f)$ avec $f \in I$ constituent une base de $Y-D$, il en résulte que q induit un homéomorphisme des espaces topologiques sous-jacents.

Posons $U = Y - D$ et $U' = Y' - V(I')$. Le fait que (*) soit un isomorphisme entraîne que pour tout $f \in I$

$$\Gamma(U(f), O_{U'}) \to \Gamma(q^{-1}(D(f)), O_U)$$

est un isomorphisme, et *a fortiori* que $O_{U'} \to q_*(O_U)$ est un isomorphisme. Donc q est un isomorphisme d'espaces annelés. c.q.f.d.

Prouvons maintenant que le diagramme (2.6) est aussi co-cartésien.

Proposition 2.8. *On conserve les mêmes notations et hypothèses que dans* (2.7). *Le S-foncteur covariant $Y \coprod_D S$ de la catégorie $Sch|_S$ vers celle des ensembles est représentable par le S-schéma $Y' =$* Spec (B').

Preuve. Soit $Z =$ Spec (C) un S-schéma affine donné par une A-algèbre C. La donné d'une section de Z au-dessus de $Y \coprod_D S$ revient par définition à celle d'un diagramme commutatif de A-algèbres

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & B/I \end{array} .$$

Il est clair qu'il existe un homomorphisme unique de A-algèbres $C \to B'$ (cf. (2.1)) tel que $C \to B' \to B$ (resp. $C \to B' \to A$) soit égale à la flèche horizontale (resp. verticale) issue de C. Réciproquement, la donnée d'un homomorphisme de A-algèbres $C \to B'$ donne lieu à un diagramme commutatif de A-homomorphismes d'algèbres du même type que (*). On a donc vérifié que le morphisme canonique

$$(**) \qquad \mathrm{Hom}_S(Y', -) \longrightarrow Y \coprod_D S$$

de S-foncteurs covariants induit un isomorphisme des restrictions de ces foncteurs à la sous-catégorie des S-schémas affines.

Soit Z un S-schéma. On se donne deux morphismes de S-schémas $\varphi : Y \to Z$ et $\epsilon : S \to Z$ qui rendent commutatif le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\varphi"] & Z \\ D \arrow[u] \arrow[r] & S \arrow[u, "\epsilon"'] \end{tikzcd}$$

Montrons qu'il existe un morphisme unique de S-schémas $Y \xrightarrow{\psi} Z$ tel que $Y \longrightarrow Y' \xrightarrow{\psi} Z$ (resp. $S \longrightarrow Y' \xrightarrow{\psi} Z$) soit égale à φ (resp. ϵ). La question de l'existence de ψ étant locale sur S, quitte à se restreindre à un ouvert de S, on peut supposer qu'il existe un ouvert affine V de Z voisinage de $\epsilon(S)$, tel que $\epsilon(S)$ soit fermé dans V.

D'autre part, il existe un recouvrement ouvert fini $D = \cup_{I \in \Lambda} D(f_i)$ de D, où pour tout $i \in \Lambda$ on a $f_i \in B$, tel que $\varphi(D(f_i)) \subset V$. On peut donc trouver des éléments (s_i) $(i \in \Lambda)$ de B tels que la classe de $f = \sum_i s_i f_i$ dans B/I soit égale à 1. L'ouvert $D(f) \subset Y$ est alors un voisinage de D tel que $\varphi(D(f)) \subset V$. De plus, l'élément f appartient à l'image de $B' \to B$ par construction et B'_f s'identifie à

$$\mathrm{Ker}(B_f \times A \rightrightarrows B_f/IB_f)\ ,$$

car la classe de f modulo I est égale à 1.

La restriction de φ à l'ouvert $D(f) = \mathrm{Spec}\, B_f$ de Y admet une factorisation unique

$$D(f) = \mathrm{Spec}\, B_f \xrightarrow{q|D(f)} D'(f) = \mathrm{Spec}\, B'_f \xrightarrow{\Phi} V$$

en vertu de ce qui a été prouvée. La proposition (2.7) montre que le morphisme $Y \xrightarrow{q} Y'$ induit un isomorphisme

$$D(f) \cap (Y - D) \xrightarrow{\sim} D'(f) \cap (Y' - V(I'))\,,$$

à partir duquel on construit un prolongement $\overline{\Phi} : Y' \to Z$ de Φ, qui est nécessairement unique. Par construction de $\overline{\Phi}$, on a que $\varphi = \overline{\Phi} \circ q$ et que le S-morphisme $S \to Y \xrightarrow{\overline{\Phi}} Z$ est égale à ϵ. On voit donc que $\psi = \overline{\Phi}$ satisfait aux conditions demandées. On vérifie ainsi que le morphisme (**) est un isomorphisme fonctoriel, ce qui prouve la représentabilité de $Y \coprod_D S$ dans $\mathrm{Sch}|_S$. c.q.f.d.

Remarque 2.9. Avec les hypothèses de (2.8) on a :

(1) La formation de la somme amalgammé $Y \coprod_D S$ commute aux changements de base, c.à.d., étant donné un S-schéma $S' \to S$, on a un isomorphisme de S'-schémas

$$Y_{S'} \coprod_{D_{S'}} S' \xrightarrow{\sim} (Y \coprod_D S)_{S'}.$$

(2) La méthode de la présentation finie permet de construire un schéma affine $\overline{S} = \operatorname{Spec} \overline{A}$, de présentation finie sur $\mathbb{Z}$, donné par une $\mathbb{Z}$-algèbre $\overline{A}$ (de présentation finie), un morphisme $S \to \overline{S}$, un $\overline{S}$-schéma affine $\overline{Y} = \operatorname{Spec} \overline{B}$ de présentation finie, donné par une $\overline{A}$-algèbre $\overline{B}$ (de présentation finie), et un idéal $\overline{I} \subset \overline{B}$ tel que $\overline{D} = V(\overline{I})$ soit fidèlement plat sur $\overline{S}$; cette construction en V telle qu'il existe des isomorphismes

$$Y \simeq \overline{Y} \times_{\overline{S}} S, \qquad D \simeq \overline{D} \times_{\overline{S}} S.$$

On a alors un isomorphisme de S-schémas

$$Y \coprod_D S \simeq (\overline{Y} \coprod_{\overline{D}} \overline{S})_S.$$

Désormais, dans ce numéro, soient donnés :

(i) un schéma S ;

(ii) un S-schéma Y de présentation finie et plat, à fibres géométriques intègres de dimension 1, et localement projectif ;

(iii) un diviseur de Cartier relatif D donné par un sous-schéma fermé de Y.

Puisque l'image de D par $Y \to S$ est ouverte et fermée (car D est plat, localement de présentation finie et propre sur S), on peut décomposer Y en réunion d'ouverts disjoints $Y = U \cup V$, de manière que D_V soit vide et le morphisme $D_U \to U$ induit par $Y_U \to U$ soit surjectif. Pour démontrer la représentabilité de $Y \coprod_D S$ on peut supposer que S *est affine*, que Y *est projectif sur* S, et que $D \to S$ *est surjectif.*

Soient $S = \operatorname{Spec} A$ avec A local et noethérien, Y un S-schéma vérifiant la condition (ii) ci-dessus. Il existe alors un fibré très ample $\mathcal{L}$ relativement à $Y \to S$ tel que

$$Y = \operatorname{Proj} \Gamma_*(Y, \mathcal{L}),$$

où $\Gamma_*(Y\mathcal{L})$ désigne la A-algèbre graduée $\oplus_{n \geq 0} \Gamma(Y, \mathcal{L}^{\otimes n})$. Soit D un diviseur de Cartier relatif de Y donné par un idéal homogène $I = \oplus_{n \geq 1} I_n$ de $\Gamma_*(Y, \mathcal{L})$. Soit s le point de S donné par l'idéal maximal de A. Soit $k(s)$ le corps résiduel de A. Par hypothèse, la fibre $Y \times_S k(s)$ est une courbe intègre munie d'un diviseur $D \times_S k(s)$ dont le support est constitué d'un nombre fini de points de $Y \times_S k(s)$. Il existe alors un entier n et une section $\Delta_s \in \Gamma(Y \times_S k(s), \mathcal{L}^{\otimes n} \otimes_A k(s))$ tels que le support du diviseur de Δ_s soit disjoint de celui de $D \times_S k(s)$.

(Soit X une courbe intègre et projective sur un corps k. Soient $D \subset X$ un diviseur et $\mathcal{L}$ un faisceau très ample sur X tel que $X = \operatorname{Proj} \Gamma_*(X, \mathcal{L})$. Soient $k \to K$ le corps des fonctions rationnelles de X, et $k \subset K' \subset K$ une extension transcendante pure de k. Il existe alors un k-morphisme

$$X \xrightarrow{\quad p \quad} \mathbf{P}^1_k$$

tel que l'image du corps des fonctions rationnelles de $\mathbf{P}^1_k$ par le k-homomorphisme donné par p soit K'. L'image $p(D)$ est formé d'un ensemble fini de points de $\mathbf{P}^1_k$. Soient $x \in \mathbf{P}^1_k - p(D)$ et σ une section de $O_{\mathbf{P}_k}(1)$ au-dessus de $\mathbf{P}^1_k$ telle que $\sigma(x) = 0$. L'image inverse Δ de σ dans $\Gamma_*(X, \mathcal{L})$ est une section globale d'une puissance $\mathcal{L}^{\otimes n}$ dont le support du diviseur est disjoint de D.)

D'après [17], page 53, corollaire 3, on a un isomorphisme

$$(*) \qquad \Gamma(Y, \mathcal{L}^{\otimes n}) \otimes_A k(s) \simeq \Gamma(Y \times_S k(s), \mathcal{L}^{\otimes n} \otimes_A k(s)).$$

Soit $\Delta \in \Gamma_*(Y, \mathcal{L})$ une section donnant Δ_s par passage à la fibre. Notons $K = \otimes_{n \geq 0} K_n$ l'idéal homogène de $\Gamma_*(Y, \mathcal{L})$ engendré par I et par Δ. Par construction de Δ_s, il existe un entier $m \geq 0$ tel que l'image de

$$K_m \otimes_A k(s) \to \Gamma(Y, \mathcal{L}^{\otimes m}) \otimes_A k(s)$$

soit égale à $\Gamma(Y, \mathcal{L}^{\otimes m}) \otimes_A k(s)$ d'après l'isomorphisme (*). On conclut par le lemme de Nakayama que

$$K_m = \Gamma(Y, \mathcal{L}^{\otimes m}),$$

donc que l'ouvert complémentaire U de l'ensemble des zéros de Δ est un ouvert affine contenant le support du diviseur D, d'après [17], pg. 53, Corollaire 3. On a alors la

Proposition 2.10. *Soit $S = \operatorname{Spec} A$ avec A local et noethérien. Soient Y un S-schéma vérifiant la condition* (ii) *ci-dessus. $\mathcal{L}$ un fibré très ample relativement à $Y \to S$. (On a alors $Y = \operatorname{Proj} \Gamma_\star(Y, \mathcal{L})$). Soit D un diviseur de Cartier relatif de Y, défini par un idéal homogène $I = \oplus_{n \geq 1} I_n$ de $\Gamma_\star(Y, \mathcal{L})$. Il existe alors une section Δ de $\Gamma_\star(Y, \mathcal{L})$ tel que* l'ouvert affine complémentaire *U de l'ensemble de ses zéros contienne le support de D.*

Remarque 2.11. Avec les notations ci-dessus et celles de [9], $V_+(\Delta)$ est un diviseur de Cartier relatif. En effet, par construction, la restriction de Δ à la fibre $Y \times_S k(s)$ est non-diviseur de zéro et Y est plat sur S. (cf. (1.7)).

Proposition 2.12. *Soit S un schéma. Soient Y un S-schéma vérifiant* (ii), *et D un diviseur de Cartier relatif fermé. La somme amalgamée $Y \coprod_D S$ est alors représentable dans la catégorie des S-schémas.*

Preuve. Supposons d'abord S noethérien et affine. La question de la représentabilité étant locale, on peut supposer par (2.10) l'existence d'un diviseur de Cartier relatif fermé T tel que $V = Y - T$ soit un ouvert affine contenant D. Dans ce cas soit V' le S-schéma affine que représente la somme amalgamée

$$V \coprod_D S.$$

D'après (2.7) on a un isomorphisme $V - D \simeq V' - D'$, où D' désigne l'image de D par $V \to V'$. Alors le S-schéma Y' obtenu en recollant V' et $Y - D$ le long de $V' - D'$ représente la somme amalgamée $Y \coprod_D S$.

Compte tenu de (2.9) et grâce à la méthode de la présentation finie, on se ramène à partir du cas général au cas S affine et noethérien. c.q.f.d.

Soit $S = \operatorname{Spec} A$ un schéma noethérien affine. Soit Y un S-schéma projectif vérifiant la condition (ii). Soit $\mathcal{L}$ un fibré très ample de Y relativement à $Y \to S$ de manière que l'on ait

$$Y = \operatorname{Proj} \Gamma_\star(\mathcal{L}),$$

où $\Gamma_\star(\mathcal{L}) = \oplus_{d \geq 0} \Gamma(Y, \mathcal{L}^{\otimes d})$. Soit Δ une section homogène de $\Gamma_\star(\mathcal{L})$ telle que $T = V_+(\Delta)$ (cf. [9]), soit un diviseur de Cartier relatif de Y (dont le complémentaire $Y - V_+(\Delta)$ soit affine).

Proposition 2.13. *Soient S, Y et T comme ci-dessus. Soit $D \subset Y$ un diviseur de Cartier relatif tel que $D \subset Y - T$. Le S-schéma $Y \coprod_D S$ est alors projectif, de type fini, plat, et à fibres géométriques intègres.*

Preuve. On pose $\mathcal{B} = \oplus_{d\geq 0}\mathcal{B}_d = \Gamma_*(\mathcal{L})$. Alors $\mathcal{B}$ est une A-algèbre graduée engendrée par $\mathcal{B}_1$. Soit $I = \oplus_{d\geq 0} I_d$ l'idéal gradué qui définit D, c.à.d. avec les notations de [9] on a $D = V_+(I)$. Quitte à substituer $\mathcal{L}^{\otimes n}$ à $\mathcal{L}$ pour un entier $n > 0$ convenable, on peut supposer que Δ est de degré 1, et que I est engendré par un système fini de générateurs homogènes (f_p) $(p \in P)$ de degré égal à 1.

Soit $\mathcal{C}$ la A-sous-algèbre graduée engendrée par $(f_p)\,(p \in P)$ et Δ. Soit $J \subset \mathcal{C}$ l'idéal gradué engendré par $(f_p)\,(p \in P)$. On a un A-morphisme

$$(*) \qquad \operatorname{Proj}(\mathcal{B}) \to \operatorname{Proj}(\mathcal{C})$$

donné par l'inclusion $\mathcal{C} \to \mathcal{B}$, qui est défini partout. Comme Proj $(\mathcal{B})$ et Proj $(\mathcal{C})$ sont des A-schémas projectifs (cf. [9], page 104), le morphisme (*) est projectif, donc propre.

Soit $(x_q)\,(q \in Q)$ un système fini de générateurs homogènes de la A-algèbre $\mathcal{B}$, de degré égal à 1. Quitte à remplacer le système de générateurs $(f_p)\,(p \in P)$ par le système $(f_p x_q)\,((p,q) \in P \times Q)$, et $\mathcal{L}$ par $\mathcal{L}^{\otimes 2}$, on peut supposer que le morphisme (*) induit un isomorphisme

$$\operatorname{Proj}(\mathcal{B}) - D \simeq \operatorname{Proj}(\mathcal{C}) - V_+(J)$$

(pour la notation cf. [9], page 25) (cf. la preuve de (2.7)). D'autre part, la fibre de (*) au-dessus de $V_+(J)$ est donné par le sous-schéma D qui est fini sur S et à fortiori sur $V_+(J)$. Le morphisme $(*)$ est alors propre, localement de présentation finie et quasi-fini. Le théorème (8.11.1) de [13], page 41, s'applique et montre que $(*)$ est un morphisme fini. On vérifie facilement que (*) admet la factorisation suivante

$$Y = \operatorname{Proj}(\mathcal{B}) \to Y \coprod_D S \to \operatorname{Proj}(\mathcal{C}).$$

Comme (*) est fini, la restriction de (*) à l'ouvert Spec $\mathcal{C}_{(\Delta)}$

$$\operatorname{Spec}\mathcal{B}_{(\Delta)} \to \operatorname{Spec}\mathcal{C}_{(\Delta)},$$

où $\mathcal{B}_{(\Delta)}$ (resp. $\mathcal{C}_{(\Delta)}$) désigne la composante de degré 0 de la A-algèbre graduée $\mathcal{B}_\Delta$ (resp. $\mathcal{C}_\Delta$) est finie. On a alors les homomorphismes de A-algèbres

$$\mathcal{C}_{(\Delta)} \to A + I_{(\Delta)} \to \mathcal{B}_{(\Delta)},$$

où $I_{(\Delta)} \subset \mathcal{B}_{(\Delta)}$ désigne l'idéal donné par I. La $\mathcal{C}_{(\Delta)}$-algèbre $\mathcal{B}_{(\Delta)}$ étant un $\mathcal{C}_{(\Delta)}$-module fini, $A + I_{(\Delta)}$ est un $\mathcal{C}_{(\Delta)}$-module fini car $\mathcal{C}_{(\Delta)}$ est noethérien. Soit $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ la A-sous-algèbre graduée obtenue à partir de $\mathcal{C}$ en rajoutant à $\mathcal{C}$ des sections homogènes de I qui engendrent par localisation le $\mathcal{C}_{(\triangle)}$-module $A + I_{(\triangle)}$. Alors on a Proj $(\mathcal{B}') \simeq Y \coprod_D S$; de plus, il est facile de voir que Proj $(\mathcal{B}')$ est plat, à fibres géométriques intègres de dimension 1. (Ces vérifications étant locales, on se ramène au cas affine). c.q.f.d.

La méthode de la présentation finie (cf. 1.) donne à partir de (2.13) le

Corollaire 2.14. *Soit S un schéma. Soit Y un S-schéma vérifiant les conditions de* (ii). *Soit D un diviseur de Cartier relatif fermé de Y. Le S-foncteur somme amalgamée $Y \coprod_D S$ est représentable par un S-schéma localement projectif de présentation finie, plat sur S, et à fibres géométriques intègres de dimension 1.*

Soient n un entier positif et $T^{(n)} \subset \widehat{X}$ le diviseur de Cartier relatif défini par le voisinage infinitésimal d'ordre n de $T \subset \widehat{X}$ (cf. (1.8)). On pose (avec les notations de 1.)

$$\widehat{X}^{(n)} = \widehat{X} \coprod_{T^{(n)}} S. \tag{2.15}$$

Les hypothèses de (2.14) étant satisfaites par $\widehat{X}$, $T^{(n)}$ et S (cf. (1.8)) on voit que $\widehat{X}^{(n)}$ *est représentable par un S-schéma de présentation finie, localement projectif, plat et à fibres géométriques intègres de dimension 1.* On note

$$f^{(n)} : \widehat{X}^{(n)} \to S \tag{2.16}$$

Le S-morphisme naturel obtenu à partir du couple (f, id_S). Soit

$$\epsilon^{(n)} : S \to \widehat{X}^{(n)} \tag{2.17}$$

la S-section naturelle obtenue par construction de $X \coprod_{T^{(n)}} S$. Soit

$$q^{(n)} : \widehat{X} \to \widehat{X}^{(n)} \tag{2.18}$$

le S-morphisme naturel qui correspond à (2.5) dans le cas affine. Etant donnés des entiers $0 \leq n \leq m$ on a un S-morphisme naturel

$$\widehat{X}^{(n)} \longrightarrow \widehat{X}^{(m)} \tag{2.19}$$

car on a une immersion fermée $T^{(n)} \hookrightarrow T^{(m)}$. On a donc la suite de morphismes de S-schémas

$$\widehat{X} \to \widehat{X}^{(0)} \to \widehat{X}^{(1)} \to \ldots \to \widehat{X}^{(n)} \to \widehat{X}^{(n+1)} \to \ldots , \tag{2.20}$$

et les diagrammes cartésiens et co-cartésiens de la catégorie de S-schémas (cf. (2.6) et (2.8))

$$\begin{array}{ccc} T^{(n)} & \xrightarrow{i^{(n)}} & \widehat{X} \\ {\scriptstyle p^{(n)}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q^{(n)}} \\ S & \xrightarrow{\epsilon^{(n)}} & \widehat{X}^{(n)} \end{array} \tag{2.21}$$

où $p^{(n)}$ désigne la restriction $f|T^{(n)}$ et $i^{(n)}$ l'immersion $T^{(n)} \hookrightarrow \widehat{X}$.

3. Construction du système projectif de S-groupes $(J_n^{\cdot})_{n\geq 0}$

Soit $n \in \mathbf{N}$. Au S-schéma $\widehat{X}^{(n)} \xrightarrow{f^{(n)}} S$ on associe le S-foncteur de Picard relatif

$$J_n^{\cdot} = \underline{\mathrm{Pic}}_{\widehat{X}^{(n)}/S} = R^1 f_\star^{(n)}(\mathbb{G}_{m\widehat{X}^{(n)}}), \tag{3.1}$$

où $R^1 f_\star^{(n)}$ désigne le premier foncteur dérivé du foncteur image directe $f_\star^{(n)}$ de la catégorie des faisceaux fpqc au-dessus de $\widehat{X}^{(n)}$ vers celle des faisceaux fpqc au-dessus de S (cf. [7], exp. n°232). Le S-schéma $\widehat{X}^{(n)}$ est projectif, de présentation finie, plat et à fibres géométriques intègres de dimension 1 ; on a alors un isomorphisme

$$f_\star(\mathcal{O}_{\widehat{X}^{(n)}}) \simeq \mathcal{O}_S \tag{3.2}$$

(cf. [11]). D'autre part, on a une section canonique $\epsilon^{(n)} : S \to \widehat{X}^{(n)}$. Dans ce cas, étant donné un S-schéma S', on identifie l'ensemble des sections de $\underline{\mathrm{Pic}}_{\widehat{X}^{(n)}/S}$ au-dessus de S' à l'ensemble des classes d'isomorphisme des couples (L, u) formés d'un module inversible L sur $\widehat{X}^{(n)}_{S'}$ et d'une trivialisation

$$u : (\epsilon_{S'}^{(n)})^\star(L) \simeq \mathcal{O}_{S'} \qquad \text{(cf. } \textit{loc. cit.}\text{).} \tag{3.3}$$

Pour tout entier $n \geq 0$, construisons un S-morphisme fonctoriel :

$$\Phi_n : \widehat{X} - T \to \underline{\mathrm{Pic}}_{\widehat{X}^{(n)}/S}. \tag{3.4}$$

Notons d'abord qu'un fibré inversible $\widehat{L}$ sur $\widehat{X}$ de la forme $(q^{(n)})^\star(L)$, où L est un fibré inversible sur $\widehat{X}^{(n)}$, vérifie la condition suivante : il existe un fibre inversible L' sur S et un isomorphisme

$$\widehat{L}|T^{(n)} \simeq (p^{(n)})^\star(L'). \tag{3.5}$$

(Le diagramme (2.21) est cartésien). Réciproquement, si étant donné $\widehat{L}$ un tel L' existe et vérifie (3.5), il existe un fibré inversible L sur $\widehat{X}^{(n)}$ et un isomorphisme $\widehat{L} \simeq (q^{(n)})^{\star}(L)$.

Soit $S' \xrightarrow{\sigma} \widehat{X}_{S'} - T_{S'}$ une section au-dessus de S'. En vertu de l'hypothèse de lissité de $\widehat{X}_{S'} - T_{S'}$ au-dessus de S', et du fait que la dimension relative de $X_{S'} - T_{S'}$ est égale à 1, l'idéal de définition $K \subset \mathcal{O}_{\widehat{X}_{S'}}$ de cette section, est localement principal et définit alors un diviseur de Cartier relatif de $\widehat{X}_{S'}$ (au-dessus de D'). D'autre part, le support de K étant disjoint de $T_{S'}$, il existe une trivialisation évidente de la restriction de K à un voisinage ouvert U de T : u : $K|U \simeq \mathcal{O}_{\widehat{X}_{S'}}|U$. Etant donné un entier $n \geq 0$, on notera $\Phi_n(\sigma)$ la section de $\underline{\mathrm{Pic}}_{\widehat{X}^{(n)}/S}$ au-dessus de S' correspondant au couple $(K, u|T^{(n)})$.

Une adaptation immédiate du théorème principal d'existence du groupe de Picard relatif (cf. [7], exp. n°232), en suivant un argument de présentation finie, donne le :

Théorème 3.6. *Soit $f : \widehat{X} \to S$ un morphisme de schémas. On suppose :*

(i) *f est localement projectif, de présentation finie ;*

(ii) *f est plat ;*

(iii) *les fibres géométriques de f sont intègres de dimension* 1.

Sous ces conditions $\underline{\mathrm{Pic}}_{\widehat{X}/S}$ est représentable par un S-schéma en groupes séparé.

Une application de ce résultat à $\widehat{X}^{(n)} \xrightarrow{f} S$ montre que J_n est un S-schéma en groupes séparé. La suite de morphismes de S-schémas (2.20) donne lieu à un système projectif de S-groupes

$$(3.7) \qquad \cdots \longrightarrow J_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow J_1 \to J_0.$$

Par construction de (Φ_n) $(n \geq 0)$ on a, pour tout $n \geq 0$, le diagramme commutatif de S-morphismes

$$(3.8) \qquad \begin{tikzcd} J_{n+1} \arrow[r] & J_n \\ X = \widehat{X} - T \arrow[u, "\Phi_{n+1}"] \arrow[ur, "\Phi_n"'] & \end{tikzcd}$$

En d'autres termes, (Φ_n) $(n \geq 0)$ est un système projectif de S-morphismes de X dans le système projectif de S-groupes $(J_n^{\cdot})_{n \geq 0}$.

Proposition 3.9. *Pour tout $n \geq 0$, le S-groupe J_n est lisse.*

Preuve. Montrons que le S-foncteur $\underline{\mathrm{Pic}}_{\widehat{X}^{(n)}/S}$ est formellement lisse. Soient donc $S' = \operatorname{Spec} A$ un S-schéma affine, et $S'_0 = \operatorname{Spec} A_0 \longrightarrow S$ un sous-schéma défini par un idéal I de A, de carré nul. Etant donnée la description des sections de $\underline{\mathrm{Pic}}_{\widehat{X}^{(n)}/S}$ au-dessus de A_0 (resp. A) comme classes d'isomorphisme de couples (L_0, u_0) ((resp. (L, u)) d'un fibré inversible L_0 (resp. L) sur $\widehat{X}^{(n)}_{A_0}$ (resp. $\widehat{X}^{(n)}_{A}$) et d'une trivialisation u_0 (resp. u) le long de $\epsilon^{(n)}_{A_0}$ (resp. ϵ^{n}_{A}), il suffit de vérifier que tout fibré inversible L_0 au-dessus de $\widehat{X}^{(n)}_{A_0}$ se relève en un fibré inversible L de $\widehat{X}^{(N)}_{A}$. Un argument de présentation finie permet de supposer que A est noethérien (dans ce cas Spec A n'est pas nécessairement un S-schéma) et local, et bien entendu séparé pour la topologie définie par I. D'autre part, on a $H^2(\widehat{X}^{(n)}_{A_0}, F) = 0$ pour tout $\mathcal{O}_{\widehat{X}^{(n)}}$-faisceau quasi-cohérent F. En particulier, on a $H^2(\widehat{X}^{(n)}_{A_0}, \underline{\mathrm{Hom}}(L_0, L_0)) = 0$, donc il existe un faisceau inversible L sur $\widehat{X}^{(n)}_{A}$ induisant L_0. (cf. [7], Exp. n°182, Corollaire 1, page 11). On vérifie aussi facilement que $\underline{\mathrm{Pic}}_{\widehat{X}^{(n)}/S}$ est localement de présentation finie; on obtient ainsi que $J_n^{\cdot}$ est S-lisse. c.q.f.d.

Remarque 3.10. On utilise dans la preuve précédente, qu'étant donnés un morphisme propre $f : Y \to S$ avec S noethérien, un point s de S tel que $f^{-1}(s)$ soit de dimension r, et un $\mathcal{O}_Y$-module cohérent F, les faisceaux $R^p f_\star(F)$ sont nuls au voisinage de s pour tout $p > r$. (cf. [10], p. 130, (4.2.2)).

Soit G un S-schéma en groupes. On définit dans [6], exp $\mathrm{VI_B}$ un S-sous-foncteur en groupes $G^0 \subset G$ appelé la *composante neutre de* G. On prouve dans *loc. cit.*, Théorème 3.10, que si G est un S-schéma en groupes lisse, alors G° est représentable par un sous-schéma ouvert de G. On fait remarquer que, si G est un S-schéma en groupes localement de présentation finie et plat, l'énoncé précédant est aussi vrai. On a alors le

Corollaire 3.11. *La composante neutre J_n° de $J_n^{\cdot}$ est représentable par un sous-schéma ouvert de présentation finie et lisse sur S.*

Pour tout entier $n \geq 0$, on a une suite exacte de $\widehat{X}^{(n)}$-faisceaux en groupes fpqc

$$(3.12)\qquad 1\longrightarrow \mathbb{G}_{m\widehat{X}^{(n)}}\longrightarrow q_\star^{(n)}(\mathbb{G}_{m\widehat{X}})\longrightarrow Q_n\longrightarrow 1$$

qui sert de définition à Q_n. Il est clair que le support de Q_n est contenu dans $\epsilon^{(n)}(S)$. Montrons que l'on a un isomorphisme de S-groupes

$$(3.13)\qquad p_\star^{(n)}(\mathbb{G}_{mT^{(n)}})/\mathrm{Im}\ \mathbb{G}_{mS}\simeq f_\star^{(n)}(Q_n).$$

Pour étudier Q_n, on peut se ramener à une situation affine. Soient $S=\operatorname{Spec}A$ avec A local, et B une A-algèbre telle que $U=\operatorname{Spec}B$ soit un voisinage ouvert U de $T=V(I)$ dans $\widehat{X}$, où I désigne l'idéal de définition de T.

On a alors $T^{(n)}=V(I^{n+1})=\operatorname{Spec}(B/I^{n+1})$ et, par construction, on a $U=(q^{(n)})^{-1}(U')$, où U' est un sous-schéma ouvert de $\widehat{X}^{(n)}$, isomorphe à Spec $(A+I^{n+1})$. De plus, B/I^{n+1} est un module projectif de type fini sur A, et en passant à la limite inductive sur les voisinages de $T^{(n)}$ dans $\widehat{X}$, on se ramène au cas où les éléments de $1+I$ sont inversibles dans B. Alors, tout élément inversible de B/I^{n+1} se relève en un élément inversible de B, et tout élément inversible de $A+I^{n+1}$ est de la forme $a(1+i)$ avec a dans A et i dans I_{n+1}. L'assertion (3.13) résulte de là.

Montrons maintenant que le S-foncteur $f_\star^{(n)}(Q_n)$ est représentable par un S-schéma affine. La $\mathcal{O}_S$-algèbre $A_n=p_\star^{(n)}(\mathcal{O}_{T^{(n)}})$ est finie et localement libre. Soit $\check{P}(A_n)$ le fibré projectif donné par $\check{A}_n$ (cf. [9], page 71, Définition (4.11)). On a alors un isomorphisme naturel :

$$p_\star^{(n)}(\mathbb{G}_{mT}(n))/\mathrm{Im}\ \mathbb{G}_{mS}\xrightarrow{\sim}\check{P}(A_n)_{(N)},$$

où $N\in\Gamma(S,\mathrm{Sym}^{d_n}(A_n))$ est la section qui définit la norme de l'algèbre A_n. On note d_n le rang de A_n. En conclusion, $p_\star^{(n)}(\mathbb{G}_{mT^{(n)}})/\mathrm{Im}\ \mathbb{G}_{mS}$ est représentable par un ouvert affine d'un fibré projectif.

Pour tout entier $n\geq 0$, on a une suite exacte de faisceaux fppf.

$$(3.15)\qquad 1\to p_\star^{(n)}(\mathbb{G}_{mT^{(n)}})/\mathrm{Im}\ \mathbb{G}_{mS}\to \underline{\mathrm{Pic}}_{\widehat{X}^{(n)}/S}\to \underline{\mathrm{Pic}}_{\widehat{X}/S}\to 1.$$

On a la description suivante de la deuxième flèche à gauche. A toute section η de $p_\star^{(n)}(G_{mT^{(n)}})$ au-dessus d'un S-schéma S', il correspond une section de $\mathrm{Pic}_{\widehat{X}^{(n)}/S}$ au-dessus de S' : la classe d'isomorphisme du couple $(\mathcal{O}_{\widehat{X}},\eta)$ (On interprète η comme une trivialisation de $\mathcal{O}_{\widehat{X}}|T^{(n)}$.) Les classes d'isomorphismes de ces couples sont en bijection avec les sections de $\Gamma(S',p_n^{(\star)}(\mathbb{G}_{mT^{(n)}})/\mathrm{Im}\ \mathbb{G}_{mS})$.

Pour montrer l'exactitude de (3.15), quitte à passer à une extension fidèlement plate et finie $T^{(n)}_{S'} \to S'$, on peut supposer que $\widehat{X}_{S'}$ admet une section au-dessus de S'. Dans ce cas, le groupe des sections du groupe de Picard relatif $\Gamma(S', \mathrm{Pic}_{\widehat{X}_{S'}/S'})$ s'identifie au quotient $\mathrm{Pic}(\widehat{X}_{S'})/\mathrm{Pic}(S')$. Soit donc L un fibré inversible sur $\widehat{X}_{S'}$. Pour tout point s de S', il existe un voisinage ouvert U_s tel que la restriction $L|T^{(n)}_{U_s}$ soit libre. (Cette affirmation résulte du fait que $T^{(n)}_{S'} \to S'$ est un morphisme fini, et du lemme de Nakayama). Alors, étant donnée une section ξ de $\mathrm{Pic}_{\widehat{X}/S}$ au-dessus de S', il existe une extension fppf, soit $S'' \to S'$ telle que $\xi_{S''}$ se trouve dans l'image de $\mathrm{Pic}_{\widehat{X}^{(n)}/S} \to \mathrm{Pic}_{\widehat{X}/S}$, compte tenu de la description des sections de $\mathrm{Pic}_{\widehat{X}^{(n)}/S}$.

On vérifie facilement l'injectivité de la deuxième flèche à gauche, et on a ainsi prouvé l'exactitude de (3.15). Il en résulte une autre preuve de la représentabilité de $\mathrm{Pic}_{\widehat{X}^{(n)}/S}$. On peut interpréter $\mathrm{Pic}_{\widehat{X}^{(n)}/S}$ comme un torseur fppf au-dessus de $\mathrm{Pic}_{\widehat{X}/S}$ (que l'on sait représentable). Or un torseur fppf P au-dessus d'un S-schéma Y de groupe structural affine est toujours représentable, comme le montre la théorie de la descente.

De même, l'exactitude de (3.15) donne un dévissage de $\mathrm{Pic}_{\widehat{X}^{(n)}/S}$ qui prouve que les morphismes de transition du système projectif $(J^{\cdot}_n)_{n\geq 0}$ sont affines. Par conséquence la limite projective

$$J^{\cdot} = \varprojlim_n J_n \tag{3.16}$$

existe dans la catégorie des S-schémas $\mathrm{Sch}|_S$.

Posons

$$\Phi = \varprojlim_n \Phi_n. \tag{3.17}$$

On a ainsi un S-morphisme de X dans J . Pour tout entier $n \geq 0$, on a une suite exacte de faisceaux fppf

$$1 \to J^0_n \to J_n \to \mathbb{Z}_S \to 0 \tag{3.18}$$

donnée par l'augmentation canonique. Par passage à la limite projective, on obtient

$$1 \to J^0 \to J \to \mathbb{Z}_S \to 0, \tag{3.19}$$

où J^0 désigne la composante neutre de J , qui est représentable par un ouvert de $J^{\cdot}$.

4. Enoncé du théorème de factorisation et preuve dans le cas d'un schéma de base noethérien et réduit S.

Dans ce numéro et le suivant, on donne la preuve du

Théorème 4.1. *Soit S un schéma. Soit $\widehat{X}$ un S-schéma plat, de présentation finie, localement projectif, à fibres géométriques intègres de dimension 1. Soit $T \subset \widehat{X}$ un diviseur de Cartier relatif qui soit fermé. On suppose que $X = \widehat{X} - T$ est lisse sur S. Soit G un S-schéma en groupes commutatif et lisse. L'homomorphisme de groupes*

$$\mathrm{Hom}_{S-gr}(J^{\cdot}, G) \to G(X)$$

induit par composition avec $X \xrightarrow{\Phi} J^{\cdot}$ est un isomorphisme. (*Cette propriété sera désignée comme la propriété de factorisation universelle du couple* $(J^{\cdot}, \Phi)$.)

Par un argument de présentation finie, on montre que le théorème (4.1) est équivalent au

Théorème 4.2. *On reprend les mêmes notations que dans* (4.1). *Soit ψ une section de G au-dessus de X. Il existe alors un entier $n \geq 0$ et un unique S-homomorphisme de groupes*

$$\overline{\psi} : J^{\cdot}_n \to G$$

tel que $\psi = \overline{\psi} \circ \Phi_n$ (cf. (3.4)).

La preuve de (4.1) procède comme suit. Un argument de présentation finie et l'unicité de la factorisation permettent de se ramener au cas où S est un schéma affine et noethérien. On traite d'abord le cas où S est réduit, à partir de la théorie sur un corps, ensuite le cas général, par récurrence sur l'ordre de nilpotence du nilradical de S (cf. (5.1)). On construit alors à chaque étape une obstruction au relèvement infinitésimal d'une factorisation, dont on prouve la nullité en se ramenant au cas réduit.

Rappelons d'abord quelques résultats de la théorie des jacobiennes généralisées d'après Serre (cf. [16]).

Etant donnés deux entiers n, $N \geq 0$, soit

$$\sigma_n^N : \prod^N X \to J_n^N \tag{4.3}$$

le S-morphisme défini par

$$\sigma_n^N(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{i=1}^{N} \Phi_n(x_i), \tag{4.4}$$

où $(x_1, \ldots, x_N)$ désigne une section de $\prod^N X$ au-dessus d'un S-schéma S'. On note J_n^N la composante de degré N de J_n. Le morphisme (4.4) admet la factorisation suivante

$$\prod^{N} X \to \mathrm{Sym}^N_{X/S} \xrightarrow{\overline{\sigma}_n^N} J_n^N, \tag{4.5}$$

où $\mathrm{Sym}^N_{X/S}$ désigne la puissance symétrique N-ème de X (cf. [7], Exp. n°221).

Soit maintenant $S = \operatorname{Spec} k$ où k désigne un corps algébriquement clos. Dans le chapitre V de [16], pour tout entier $n \geq 0$, Serre associe, à une k-courbe projective et non-singulière $\widehat{X}$ muni d'un diviseur $T \subset \widehat{X}$ un k-schéma en groupes commutatif et connexe, que nous notons ${}^sJ_n$, et un k-morphisme $\varphi_n : X \to {}^sJ_n$. Le couple $(\varphi_n, {}^sJ_n)$ vérifie la propriété de factorisation universelle exprimée par le théorème 2, p. 96, de *loc. cit.* Soit P_0 une section de $X = \widehat{X} - T$. On vérifie alors que le couple $(\varphi_n, {}^sJ_n)$ s'identifie avec les notations de 3, à $(\Phi_n - \Phi_n(P_0), \underline{\mathrm{Pic}}^0_{\widehat{X}^{(n)}/S})$.

(Le théorème 1 de *loc. cit.* p. 95 donne une interprétation des sections de ${}^sJ_n$ au-dessus de k en termes de classes de diviseurs étangers à T de degré 0. La relation d'équivalence est définie à partir des fonctions méromorphes m qui vérifient la relation $m - 1 \in I^{n+1}$, où $I \subset \mathcal{O}_{\widehat{X}}$ désigne l'idéal de définition de $T \subset \widehat{X}$. A partir de la relation bien connue entre classes d'isomorphisme de fibrés inversibles sur $\widehat{X}$ et classes d'équivalence linéaire de diviseurs relatifs (cf. [14]), on montre que les sections de ${}^sJ_n$ et celles de $\underline{\mathrm{Pic}}^0_{\widehat{X}^{(n)}/S}$ sont les mêmes au-dessus d'un corps k'. Le théorème 2 de *loc. cit.* p. 96 donne un S-morphisme de groupes ${}^sJ_n \to \underline{\mathrm{Pic}}^0_{\widehat{X}^{(n)}/S}$. On prouve, compte tenu de ce qui précède et des constructions de [7], Exp. n°221, que c'est un isomorphisme.)

Lemme 4.6. *Soit k un corps et soit $\overline{k}$ une clôture algébrique de k. Soit $\widehat{X}$ une courbe projective sur k telle que $\widehat{X} \times_k \overline{k}$ soit intègre. Soit $T \subset \widehat{X}$ un diviseur de Cartier relatif tel que $X = \widehat{X} - T$ soit lisse. Etant donné un entier $n > 0$, il existe alors un entier $N > 0$ tel que le morphisme*

$$\sigma_n^N : \prod^{N} X \to \underline{\mathrm{Pic}}^N_{\widehat{X}^{(n)}/S}$$

soit surjectif.

Preuve. Quitte à remplacer $\widehat{X}$ par $\widehat{X} \times_k \overline{k}$, on peut supposer k algébriquement clos (cf. [13], p. 27). On peut aussi supposer $\widehat{X}$ lisse, quitte à remplacer $\widehat{X}$ par un modèle lisse $\widehat{X}'$ de $\widehat{X}$ et T par son image inverse T'. (Tout S-groupe $\underline{\mathrm{Pic}}_{\widehat{X}^{(n)}/S}$ construit à partir de $(\widehat{X}, T)$ peut-être majoré par un S-groupe $\underline{\mathrm{Pic}}_{\widehat{X}'^{(n)}/S}$ construit à partir de $(\widehat{X}', T')$ et réciproquement.) Soit π le genre arithmétique de $\widehat{X}^{(n)}$ (cf. [16], p. 71, formule (12)). La proposition 2 de *loc. cit.* p. 90 et le lemme 16 de *loc. cit.*, p. 95 montrent que le k-morphisme

$$\overline{\sigma}_n^\pi : \mathrm{Sym}^\pi_{\widehat{X}^{(n)}/S} \longrightarrow \underline{\mathrm{Pic}}^\pi_{\widehat{X}^{(n)}/S}$$

est birationnel. Donc la restriction à un ouvert convenable U de $\mathrm{Sym}^\pi_{\widehat{X}^{(n)}/S}$ de $\overline{\sigma}_n^\pi$ a pour image un ouvert V de $\underline{\mathrm{Pic}}^\pi_{\widehat{X}^{(n)}/S}$, nécessairement dense car $\underline{\mathrm{Pic}}^\pi_{\widehat{X}^{(n)}/S}$ est irréductible (puisqu'il est isomorphe à $\underline{\mathrm{Pic}}^0_{X^{(n)}/S}$). Il résulte de [6], Exp VI_A, 0.5, que la flèche $V \times V \longrightarrow \underline{\mathrm{Pic}}^{2\pi}_{\widehat{X}^{(n)}/S}$, donnée par la multiplication, est surjective. D'où il résulte que $\overline{\sigma}_n^{2\pi}$ est surjective et a fortiori $\sigma_n^{2\pi}$ aussi. c.q.f.d.

Proposition 4.7. *Soit S un schéma noethérien. Soient $\widehat{X}$, T, X, $J_n = \underline{\mathrm{Pic}}_{\widehat{X}^{(n)}/S}$, et Φ_n définis comme dans* (4.2). *Il existe alors un entier $N > 0$ et un ouvert $U \subset \prod^N X$ tels que le S-morphisme*

$$\sigma_n^N \mid U : U \longrightarrow J_n^N$$

soit fidèlement plat.

Preuve. Pour chaque point s de S, il existe un entier N qui dépend de s tel que

$$(\sigma_n^N)_s : \prod^N X_s \to (J_n^N)_s$$

soit surjectif (cf. (4.6)). Puisque J_n est de présentation finie, il en résulte que J_n^N est aussi de présentation finie. Il existe alors un ouvert U_s de $\overline{\{s\}}$ (cf. [13], p. 37, théorème (8.10.5)) tel que

$$(\sigma_n^N)_{U_s} : \prod^N X_{U_s} \to (J_n^N)_{U_s}$$

soit surjectif. Le schéma S étant noethérien, il est alors compact pour la topologie constructible. (cf. [8], p. 338, Proposition (7.2.13)). Il est donc possible de choisir un entier $N > 0$ tel que

$$\sigma_n^N : \prod^N X \longrightarrow J_n^N$$

soit surjectif. Par le théorème de platitude générique (cf. [12], p. 153), il existe un ouvert dense V_s de $(J_n^N)_s$ tel que $(\sigma_n^N)_s \mid (\sigma_n^N)_s^{-1}(V_s) : (\sigma_n^N)_s^{-1}(V_s) \to V_s$ soit plat et surjectif. D'autre part, il résulte de [6], Exp VI_A, 0.5, que le morphisme donné par la multiplication

$$V_s \times V_s \longrightarrow (J_n^{2N})_s$$

est plat et surjectif. Soit

$$U_s = (\sigma_n^N)_s^{-1}(V_s) \times (\sigma_n^N)_s^{-1}(V_s).$$

On a alors que le morphisme

$$(\sigma_n^{2N})_s | U_s : U_s \longrightarrow V_s \times V_s \longrightarrow (J_n^{2N})_s$$

est plat et surjectif. Le critère de platitude par fibres (cf. [12], p. 138) donne que la restriction de σ_n^{2N} à l'ouvert U de platitude de σ_n^{2N} est un morphisme surjectif. c.q.f.d.

Soit S un schéma noethérien réduit. Soit

$$\psi : X \longrightarrow G$$

un S-morphisme dans un S-groupe lisse G. Supposons d'abord que G soit séparé. Si s est un point générique d'une composante irréductible de S, la théorie sur un corps (cf. [16], ch. V, Théorème 2) donne l'existence d'un entier $n \geq 0$ et d'un $k(s)$-homomorphisme de $k(s)$-schémas en groupes

$$\overline{\psi}_{n,s} : (J_n^{\cdot})_s \longrightarrow G \times_S k(s)$$

tel que $\psi_s = \overline{\psi}_{n,s} \circ (\Phi_n)_s$.

Comme X est un S-schéma de présentation finie et G localement de présentation finie, il existe un ouvert U_s de $\overline{\{s\}}$ et un U_s-morphisme de U_s-schémas en groupes

$$\overline{\psi}_{nU_s} . (J_n^{\cdot})_{U_s} \longrightarrow G \times_S U_s$$

tels que :

$$\psi_{U_s} = \overline{\psi}_{nU_s} \circ (\Phi_n)_{U_s}.$$

On construit alors un ouvert dense V de S et une factorisation

$$\psi_V = \overline{\psi}_{nV} \circ (\Phi_n)_V.$$

D'autre part, $\overline{\psi}_{nV}$ admet une extension $\overline{\psi}_n$ à J_n s'il existe un entier $N > 0$ tel que $\overline{\psi}^N_{nV} = \overline{\psi}_{nV}|(J^N_n)_V$ admette une extension $\overline{\psi}^N_n$ à J^N_n. Montrons alors que $\overline{\psi}^N_{nV}$ admet une extension $\overline{\psi}^N_n$ à J^N_n. Soit U l'ouvert donné par (4.7). On a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
U \cap \prod^N X_V \arrow[r, "\sigma^N_n|U\cap\prod^N X_V"] \arrow[d] & J^N_{nV} \arrow[d] \arrow[dr, "\overline{\psi}^N_{nU}"] & \\
U \arrow[r, "\sigma^N_n|U"] \arrow[rr, bend right, "\sigma^N_\psi"'] & J^N_n & G
\end{tikzcd}$$

où $\sigma^N_\psi(x_1,\ldots,x_N) = \sum_{i=1}^N \psi(x_i)$, $(x_1,\ldots,x_N) \in U(S')$ si S' est un S-schéma. Comme S est réduit et que $\prod^N X$ est lisse sur S, ce schéma $\prod^N X$ est réduit. D'un autre côté, $\prod^N X_V \cap U$ est dense dans U, et comme U est réduit, $\prod^N X_V \cap U$ est schématiquement dense dans U. Puisque l'on a supposé que G est un S-schéma en groupes séparé, $\overline{\psi}^N_{nV}$ admet une extension $\overline{\psi}^N_n$.

Dans le cas où G n'est pas séparé, on peut, quitte à multiplier la section ψ de G au-dessus de X par une section convenable, supposer que ψ est une section de la composante neutre G°, et conclure par l'argument précédent. (la composante neutre étant toujours séparée.)

On a ainsi prouvé le théorème (4.2) dans le cas où la base S est noethérienne et réduite.

Remarque 4.8. L'énoncé de (4.7) reste valable pour une base S arbitraire. En effet, on se ramène d'abord au cas affine et ensuite au cas noethérien par un argument de présentation finie. La fidèle platitude d'un morphisme est une propriété qui se préserve par changements de base.

On reprend ici les notations de (4.1). Soit $S' \to S$ une extension fidèlement plate de S. Le résultat suivant permet de ramener la construction d'une factorisation d'une section ψ de G au-dessus de X, à celle de $\psi_{S'}$.

Proposition 4.9. *Avec les notations de* (4.1), *la flèche*

$$\mathrm{Hom}_{S-gr}(J^{\cdot}, G) \to G(X)$$

induite par composition avec Φ *est injective.*

Preuve. Une section f de $\mathrm{Hom}_{s-gr}(J^{\cdot}, G)$ admet une factorisation $J^{\cdot} \to J^{\cdot}_n \to G$ pour un entier n assez grand, car G est localement de présentation finie et transforme donc les limites projectives en limites inductives. Montrons donc qu'étant donnés deux S-homomorphismes f, g : $J^{\cdot}_n \rightrightarrows G$ tels que les deux flèches $X \xrightarrow{\Phi_n} J^{\cdot}_n \xrightarrow{\sim} G$ obtenues par composition coïncident et sont égales à un S-morphisme ψ, on a alors $f = g$. Soit $\sigma_n^N|U : U \to J_n^N$ l'extension fidèlement plate de (4.7) (cf. (4.8)). Par hypothèse, on a les égalités

$$f \circ (\sigma_n^N|U) = g \circ (\sigma_n^N|U) = \sum_{i=1}^{N} \psi \circ P_i \ ,$$

où P_i dénote la projection de $\prod^N X$ sur le i-ème facteur. Comme G est un faisceau pour la topologie fppf il résulte que $f = g$.

Corollaire 4.10. *On conserve les notations de* (4.9). *Soit* ψ *une section de* G *au-dessus de* X. *Soit* $S' \to S$ *une extension fidèlement plate de* S. *Toute factorisation*

$$\psi_{S'} = \overline{\psi}_{S'} \circ \Phi$$

de $\psi_{S'}$, *où* $\overline{\psi}_{S'} : J_{S'} \to G_{S'}$ *désigne un* S'*-homomorphisme, provient d'une factorisation* $\psi = \overline{\psi} \circ \Phi$ *de* ψ *au-dessus de* S.

Preuve. On vérifie immédiatement grâce à (4.9) que si l'on désigne par $(\overline{\psi}_{S'})_1$ (resp. $(\overline{\psi}_{S'})_2$) l'image de $\overline{\psi}_{S'}$ par la première (resp. deuxième) flèche de

$$\mathrm{Hom}_{S'-gr}(J_{S'}, G_{S'}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{S'\times_S S'-gr}(J_{S'\times_S S'}, G_{S'\times_S S'}),$$

on a $(\overline{\psi}_{S'})_1 = (\overline{\psi}_{S'})_2$ du fait qu'ils factorisent la même section de G au-dessus de $X_{S'\times_S S'}$. c.q.f.d.

Remarque 4.11. (i) Dans la preuve de (4.1) pour une base réduite, on prend comme point de départ la validité de (4.1) pour un corps de base k quelconque. En fait la preuve du théorème de factorisation au-dessus d'un corps, donnée par Serre, n'est valable que si celui-ci est algébriquement clos. Le corollaire (4.10) permet de se ramener à ce cas.

(ii) Le (4.10) intervient implicitement dans la preuve de (4.1) pour une base réduite afin de passer du cas d'un S-groupe lisse G au cas d'un S-groupe lisse et séparé. En effet, étant donné $\psi \in G(X)$, ce n'est qu'après une extension fidèlement plate $S' \to S$ qu'il est possible de construire une section f de G (au-dessus de S') tel que $\psi . f^{-1}_{X_{S'}}$, soit une section de la composante neutre G° de G.

Le (4.10) permet de ramener d'abord la preuve de (4.1) au cas affine en prenant $S' \to S$ donné par un recouvrement ouvert affine de S. La méthode de la présentation finie (cf. 1) permet de supposer finalement que S est affine et noethérien.

5. Preuve de (4.1) dans le cas d'une base générale

Soit $S = \operatorname{Spec}(A)$, où A désigne un anneau noethérien. Soit I le nilradical de A, c.à.d. l'idéal intersection des idéaux premiers de A formé des $x \in A$ qui sont nilpotents.

Proposition 5.1. *Il existe une suite d'idéaux*

$$I_\circ = I \supset I_1 \supset \cdots \supset I_m \supset I_{m+1} = \{0\}$$

tel que, pour tout $0 \leq i \leq m$, *on ait :*

(a) $I_i^2 \subset I_{i+1}$.

(b) *Il existe un idéal premier* P_i *de* A *et un isomorphisme de* A*-modules*

$$I_{i+1}/I_i \simeq A/P_i.$$

Preuve. Soit ℓ le plus petit entier positif tel que $I^{\ell+1} = 0$. Pour tout $1 \leq \alpha \leq \ell$, il existe une suite d'idéaux :

$$I^\alpha = I_{\alpha,0} \supset \cdots \supset I_{\alpha,\lambda_\alpha} = I^{\alpha+1},$$

tel que pour tout $0 \leq \beta < \lambda_\alpha$ on ait : "Il existe un idéal premier $P_{\alpha\beta}$ de A et un isomorphisme de A-modules $I_{\alpha,\beta}/I_{\alpha,\beta+1} \simeq A/P_{\alpha\beta}$".

En effet il suffit de prendre une suite de composition convenable du A-module $I^\alpha/I^{\alpha+1}$ (cf. [4], théorème p. 136) et de la relever ensuite à I^α. Comme $(I^\alpha)^2 \subset I^{\alpha+1}$ on a aussi, pour tout $0 \leq \beta < \lambda_\alpha$, la relation $I^2_{\alpha,\beta} \subset I_{\alpha,\beta+1}$. La suite d'idéaux

$$I = I_{1,0} \supset \cdots \supset I_{1,\lambda_1} = I_{2,0} \supset \cdots \supset I_{\ell,\lambda_\ell} = 0$$

vérifie alors (a) et (b). c.q.f.d.

Pour tout $0 \leq j \leq m+1$ on pose

$$S^{(j)} = \operatorname{Spec} A/I_j \ . \tag{5.2}$$

Alors $S^{(0)}$ est un schéma réduit, et $S^{(j)}$ est un sous-schéma fermé de $S^{(j+1)}$ $(0 \leq j \leq m)$ donné par un idéal $J \subset A/I_{j+1}$ de carré nul. Soit donc $\psi \in G(X)$. A partir de (4.1) pour une base noethérienne et réduite, on a une factorisation de $\psi_{S^{(0)}}$ par $\Phi_{S^{(0)}} : X_{S^{(0)}} \to J^{\cdot}_{S^{(0)}}$. On se propose de construire une suite de S-homomorphismes de S-groupes

$$\overline{\psi}_{S^{(0)}} : J^{\cdot}_{S^{(0)}} \longrightarrow G_{S^{(0)}}, \ldots, \overline{\psi}_{S^{(j)}} : J^{\cdot}_{S^{(j)}} \longrightarrow G_{S^{(j)}}, \ldots$$

tels que

$$\overline{\psi}_{S^{(j)}} | J^{\cdot}_{S^{(j-1)}} = \overline{\psi}_{S^{(j-1)}}$$

et

$$\psi_{S^{(j)}} = \overline{\psi}_{S^{(j)}} \circ \Phi_{S^{(j)}}$$

pour $0 < j \leq m+1$. Soient donc S un schéma, et $I \subset \mathcal{O}_S$ un idéal quasi-cohérent de $\mathcal{O}_S$ de carré nul. On pose $V(I) = S_0$, $X_0 = X \times_S S_0$,

$$(J^{\cdot}_n)_0 = J^{\cdot}_n \times_S S_0,\ (J^{\cdot})_0 = J^{\cdot} \times_S S_0,\ G_0 = G \times_S S_0,\ (\Phi_n)_0 = \Phi_n \times_S \mathrm{Id}_{S_0} \ldots$$

etc. Supposons qu'étant donné $\psi \in G(X)$, l'on soit parvenu à construire une factorisation

(5.3)

$$\begin{tikzcd} & G_0 \\ X_0 \arrow[ur, "\psi_0"] \arrow[r, "(\Phi_n)_0"'] & (J^{\cdot}_n)_0 \arrow[u, "(\bar{\psi}_n)_0"'] \end{tikzcd}$$

de $\psi_0 = \psi | X_0$. Il s'agit de montrer qu'il est possible de trouver un entier $m \geq n$, et de construire un diagramme commutatif

(5.4)

$$\begin{tikzcd} & G_0 \arrow[r] & G & \\ & (J^{\cdot}_m)_0 \arrow[u, "(\bar{\psi}_m)_0"'] \arrow[r] & J^{\cdot}_m \arrow[u, dashed] & \\ X_0 \arrow[uur, "\psi_0"] \arrow[ur, "(\Phi_m)_0"'] \arrow[rrr] & & & X \arrow[uul, "\psi"'] \arrow[ul, "\Phi_m"'] \end{tikzcd}$$

où $(\overline{\psi}_m)_0$ désigne le S-homomorphisme induit par $(\overline{\psi}_m)_0$ et la flèche en pointillé un S-homomorphisme (à construire) qui prolonge $(\overline{\psi}_m)_0$.

Soient G un S-schéma en groupes lisse et W un S-schéma. Etant donné un S-morphisme $\gamma_0 : W_0 = W \times_S S_0 \to G$, on se propose d'exprimer l'obstruction à l'existence d'un prolongement (infinitésimal) $\gamma : W \to G$ de γ_0 et ensuite, sous l'hypothèse de la trivialité de l'obstruction, de classer les prolongements. On note C_S la sous-catégorie pleine des S-schémas plats de $\mathrm{Sch}|_S$. Dans [6], Exp. II, on associe à un S-schéma Z le S-foncteur Z^+ défini par la formule :

$$\mathrm{Hom}_S(Y, Z^+) = \mathrm{Hom}_{S_0}(Y_0, Z_0), \tag{5.5}$$

où Y désigne un S-schéma variable ($Y_0 = Y \times_S S_0$, $Z_0 = Z \times_S S_0$). En d'autres termes Z^+ est l'image directe de Weil (avec les notations de [6], Exp. n°II)

$$Z^+ = \prod_{S_0/S} Z_0.$$

D'autre part, par construction, on a un S-morphisme de foncteurs

$$Z \longrightarrow Z^+ \tag{5.6}$$

que l'on veut décrire. Soit L_Z le Z^+-foncteur en groupes commutatifs défini par

$$\mathrm{Hom}_{Z^+}(Y, L_Z) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{Y_0}}(g_0^\star(\Omega^1_{Z_0/S_0}), I\mathcal{O}_Y), \tag{5.7}$$

où $\Omega^1_{Z_0/S_0}$ désigne le module des différentielles relatives de Z_0 par rapport à S_0, et où on regarde $I\mathcal{O}_Y$ comme $\mathcal{O}_{Y_0} = \mathcal{O}_Y/I\mathcal{O}_Y$-module car $I^2 = 0$. On désigne par $g_0 : Y_0 \to Z_0$ le S_0-morphisme qui correspond à la section de Z^+ au-dessus de Y, et fait de Y un Z^+-schéma. Dans le cas où *Z est un S-schéma en groupes lisse*, on a

$$g_0^\star(\Omega^1_{Z_0/S_0}) = \omega^1_{Z_0/S_0} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_{Y_0}\ , \tag{5.8}$$

où $\omega^1_{Z_0/S_0}$ désigne le $\mathcal{O}_{S_0}$-module localement libre dual de l'algèbre de Lie de Z_0 (espace tangent à Z_0 le long de la section identité). D'autre part, si *Y est un S-schéma plat*, $I\mathcal{O}_Y$ s'identifie à $I \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_{Y_0}$. En conclusion, on a sous les deux hypothèses faites

$$\mathrm{Hom}_{Z^+}(Y, L_Z) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{Y_0}}(\omega^1_{Z_0/S_0} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_{Y_0}, I \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_{Y_0}). \tag{5.9}$$

D'autre part, puisque Z_0 est lisse sur S, donc localement de présentation finie, on a

$$\operatorname{Hom}_{Z^+}(Y, L_Z) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{S_0}}(\omega^1_{Z_0/S_0}, I) \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_{Y_0}. \tag{5.10}$$

Soit donc $L_{0Z} = W(\mathit{Hom}_{\mathcal{O}_{S_0}}(\omega^1_{Z_0/S_0}, I))$ le S_0-groupe vectoriel (cf. [6], Exp. n°I, 4.6.1) défini par le $\mathcal{O}_{S_0}$-module $\mathit{Hom}_{\mathcal{O}_{S_0}}(\omega^1_{Z_0/S_0}, I)$. En conclusion, on a, pour tout S-schéma plat Y, l'égalité suivante

$$\operatorname{Hom}_{Z^+}(Y, L_Z) = \operatorname{Hom}_{S_0}(Y_0, L_{0Z}). \tag{5.10)bis}$$

Proposition 5.11. *Pour tout S-schéma Z, on peut définir une opération du Z^+-groupe abélien L_Z sur le Z^+-objet Z, qui fait de Z un objet formellement principal homogène sous L_Z au-dessus de Z^+ : le morphisme*

$$L_Z \times_{Z^+} Z \longrightarrow Z \times_{Z^+} Z$$

est un isomorphisme. De plus, pour tout S-morphisme $f : Y \to Z$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} L_Y \times_{Y^+} Y \arrow[r] \arrow[d, "L_f \times_{f^+} f"'] & Y \arrow[d] \\ L_Z \times_{Z^+} Z \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

(Le morphisme L_f se définit de façon évidente à partir du morphisme de $\mathcal{O}_{Y_0}$-modules

$$f_0^*(\Omega^1_{Z_0/S_0}) \longrightarrow \Omega^1_{Z_0/S_0}.)$$

Soit G un S-schéma en groupes commutatifs. Alors G^+ est un S-faisceau de Zariski en groupes commutatifs. On définit un S-faisceau de Zariski en groupes à partir de la suite exacte

$$1 \longrightarrow K \longrightarrow G \longrightarrow G^+. \tag{5.12}$$

D'autre part d'après (5.11), G est un G^+-objet L_G-formellement principal homogène. On introduit un S-faisceau de Zariski en groupes par la formule

$$L'_G(Y) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{Y_0}}(\omega^1_{G_0/S_0} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_{Y_0}, I\mathcal{O}_Y) \tag{5.13}$$

(Y étant un S-schéma variable). Soit $g_0 : Y_0 \to G$ un S-morphisme ; on a alors un isomorphisme de $\mathcal{O}_{Y_0}$-modules

$$\omega^1_{G_0/S_0} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_{Y_0} \simeq g_0^*(\Omega^1_{G_0/S_0}). \tag{5.14}$$

A partir de (5.14) on peut définir un isomorphisme de G^+-groupes

$$G^+ \times_S L'_G \simeq L_G. \tag{5.15}$$

Par conséquent, G est muni d'une structure de G^+-objet formellement principal homogène sous L'_G. *Il s'agit maintenant de comparer cette structure avec celle donnée par* (5.12). Soit Y un S-schéma. Soit g_0 la section identité de G^+ au-dessus de Y. La fibre $(L_G(Y))_{(g_0)^+}$ s'identifie à $L'_G(Y)$. D'autre part $K(Y)$ correspond par définition à la fibre $(G(Y))_{(g_0)^+}$. On définit (cf. (5.11)) alors à partir de la section identité de G une bijection

$$L'_G(Y) \simeq K(Y) \tag{5.16}$$

fonctorielle en Y. *En fait* (5.16) *est un isomorphisme de S-groupes.*

Proposition 5.17. *L'isomorphisme (5.16) donne lieu à un isomorphisme entre la structure de G^+-objet K-formellement principal homogène de G et celle de G^+-objet L'_G-formellement principal homogène (cf.* [6], Exp. II*).*

Corollaire 5.18. *Soient G un S-schéma en groupes commutatifs, Y un S-schéma, et $g_0 : Y_0 \to G$ un S-morphisme. Il existe alors un Y-objet L'_G-formellement principal homogène τ_Y tel que :*

(i) *Pour tout ouvert U de Y, l'ensemble des sections $\Gamma(U, \tau_Y)$ est en bijection avec l'ensemble des prolongements à U de $g_0|U_0$.*
(ii) *Si G est un S-schéma en groupes lisse, alors τ_Y est un L'_G-torseur de Zariski.*
(iii) *On suppose que G est un S-schéma en groupes lisse. Soit $\alpha : Y \to Y'$ un S-morphisme. Soit $g'_0 : Y'_0 \to G$. On définit $\tau_{Y'}$ (resp. τ_Y) à partir de g'_0 (resp. $g_0 = g'_0 \circ \alpha_0$). On a alors un isomorphisme de L'_G-torseurs de Zariski au-dessus de Y :*

$$\alpha^*(\tau_{Y'}) \simeq \tau_Y.$$

Preuve. Il suffit de prendre τ_Y égal à l'image inverse du G^+-objet L'_G-formellement principal G, par le S-morphisme

$$(g_0)^+ : Y \longrightarrow G^+.$$

On a alors (i) immédiatement.

Le (ii) résulte du fait que localement toute section g_0 de G, au-dessus de Y_0 se relève en une section g de G au-dessus de Y. Le (iii) résulte de (ii) et de (5.11). c.q.f.d.

Corollaire 5.19. *Soient Γ un S-schéma en groupes commutatif, G un S-schéma en groupes commutatifs lisse, et $g_0 : \Gamma_0 \to G$ un homomorphisme de S-groupes. Il existe alors une extension de Zariski*

$$1 \longrightarrow L'_G \longrightarrow E \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 1$$

dont les scindages correspondent aux S-homomorphismes $g : \Gamma \to G$, qui prolongent g_0. De plus E s'identifie à τ_Γ en tant que L'_G-torseur. (Notons que E est égal au S-groupe produit fibré $G \times_{G^+} \Gamma$. Une vérification simple montre que les scindages de E correspondent bien aux prolongements g de g_0 à Γ, en tant que S-homomorphismes.)

Lemme 5.20. *Soit C une catégorie avec objet final. Soient Γ un foncteur en groupes de C, et L un foncteur en groupes commutatif de C. La donnée d'une suite exacte de C-groupes*

$$1 \longrightarrow L \longrightarrow E \longrightarrow \Gamma$$

tel, que pour tout $X \in ob\ C$ l'image de $L(X)$ soit dans le centre de $E(X)$, équivaut aux données suivantes :

(i) *Un Γ-objet L-formellement principal homogène $E \to \Gamma$.*

(ii) *Un morphisme $m : pr_1^\star(E) \times pr_2^\star(E) \longrightarrow \pi^\star(E)$ (où pr_1 (resp. pr_2) désigne la projection $\Gamma \times \Gamma \longrightarrow \Gamma$ sur la première (resp. deuxième) composante et π la loi de composition de Γ) tel que :*

$$(a) \qquad m(x\ell, x'\ell') = m(x, x')\ell\ell'$$

où x (resp. x', ℓ, ℓ') désigne une section de $\mathrm{pr}_1^\star(E)$ *(resp. $pr_2^\star(E), L, L$) au-dessus d'un objet variable X de C.*

(b) *le diagramme d'associativité construit à partir de m est commutatif.*

(c) *Il existe une section e de E au-dessus de la section identité de Γ telle que, pour toute section x de $E(X)$ ($X \in ob\ C$), on ait $m(e_X, x) = m(x, e_X) = x$.*

(d) *Un morphisme* $\mathrm{inv}_E : E \to \mathrm{inv}_\Gamma^\star(E)$ *tel que pour tout objet X de C et tout $x \in E(X)$, on ait* $\mathrm{inv}_E(x\ell) = \mathrm{inv}_E(x)\ell^{-1}$ $(\ell \in L(X))$,

$$e_X = m(x, \mathrm{inv}_E(x)) = m(\mathrm{inv}_E(x), x).$$

($\mathrm{inv}_\Gamma : \Gamma \to \Gamma$ désigne le morphisme $x \to x^{-1}$. Le morphisme m définit sur E une structure de groupe tel que $E \to \Gamma$ soit un homomorphisme de C-groupes. La condition (a) entraîne que le morphisme

$L \to E$ donnée par $\ell \mapsto e.\ell$ est un homomorphisme de C-groupes, et que l'action de L sur E coïncide avec celle définie par la loi de composition m et l'homomorphisme précédent. Il est clair que l'image de $L \to E$ donne le noyau de $E \to \Gamma$, et que $L(X)$ est contenu dans le centre de $E(X)$ pour tout $X \in ob\ C$).

On suppose que Γ, L et E sont des foncteurs de $\mathrm{Sch}|_S$ vérifiant les conditions suivantes :

(1) Γ est représentable par un S-schéma en groupes ;

(2) L est un S-faisceau de Zariski en groupes commutatifs ;

(3) $E \longrightarrow \Gamma$ est un L-torseur de Zariski.

On veut alors exprimer les conditions de (5.20) pour avoir une extension de Zariski

$$1 \to L \to E \to \Gamma \to 1$$

en termes de conditions sur des morphismes de torseurs de Zariski.

Soient (U_i) $(i \in I)$ un recouvrement ouvert de $\Gamma \times_S \Gamma$ donnant lieu à une trivialisation (σ_i) $(i \in I)$ de $pr_1^\star(E) \times pr_2^\star(E)$, et à une trivialisation (τ_i) $(i \in I)$ de $\pi^\star(E)$. On pose $\sigma_i \doteq (\sigma_i^1, \sigma_i^2)$. Soit m un morphisme comme celui de (ii) de (5.20). On pose pour tout $i \in I$

$$(5.21) \qquad m(\sigma_i) = \tau_i \varphi_i \ ,$$

où $\varphi_i \in L(U_i)$, et pour tout $(i,j) \in I \times I$

$$(\sigma_i|U_i \cap U_j).g_{ij} = \sigma_j|U_i \cap U_j, (\tau_i|U_i \cap U_j)h_{ij} = \tau_j|U_i \cap U_j,$$

où $g_{ij} = (g_{ij}^1, g_{ij}^2) \in (L \times L)(U_i \cap U_j)$ et $h_{ij} \in L(U_i \cap U_j)$. On a alors pour tout $(i,j) \in I \times I$ la relation

$$(5.22) \qquad \varphi_j|U_i \cap U_j = h_{ji}(\varphi_i|U_i \cap U_j) \ . \ (g_{ij}^1 \ . \ g_{ij}^2) \ ;$$

réciproquement, la donnée de (φ_i) $(i \in I)$ vérifiant la condition (5.22) donne lieu à un morphisme vérifiant (ii), (a) de (5.20).

Exprimons la condition d'associativité de m. Soit

$$p : \Gamma \times_S \Gamma \times_S \Gamma \to \Gamma$$

le morphisme obtenu à partir de la loi de composition de Γ. Notons E' (resp. E'', E''') l'image inverse de $E \to \Gamma$ par la projection sur le premier (resp. deuxième, troisième) facteur.

La loi m est associative si l'on a l'égalité des deux morphismes suivants d'un $L \times_S L \times_S L$-torseur dans un L-torseur au-dessus de $\Gamma \times_S \Gamma \times_S \Gamma$

$$\alpha, \beta : E' \times E'' \times E''' \rightrightarrows p^\star(E) \tag{5.23}$$

où

$$\alpha = ((\pi \times_S \mathrm{id}_\Gamma)^\star(m)) \circ ((m \times_S \mathrm{id}_\Gamma) \times_\Gamma \mathrm{id}_{E'''})$$

et

$$\beta = ((\mathrm{id}_\Gamma \times_S \pi)^\star(m)) \circ (\mathrm{id}_{E'} \times_\Gamma (\mathrm{id}_\Gamma \times_S m)).$$

Soit maintenant $\Gamma' \subset \Gamma$ le sous-schéma donné par l'image de la section identité de Γ. Soit $(V_i)(i \in I)$ le recouvrement ouvert de $\Gamma' \times_S \Gamma \subset \Gamma \times_S \Gamma$ induit par $(U_i)(i \in I)$. Soit e' la section de $pr_1^\star(E)|\Gamma' \times_S \Gamma$ donnée par l'identité e de E. On pose

$$e'|V_i = (\sigma_i^1|V_i).\ell_i$$

où $\ell_i \in L(V_i)$. Comme on a $pr_2^\star(E)|(\Gamma' \times_S \Gamma) = \pi^\star(E)|(\Gamma' \times_S \Gamma)$, la section $\sigma_i^2|V_i$ donne lieu à une section de $\pi^\star(E)|V_i$ qui s'écrit :

$$\sigma_i^2|V_i = (\tau_i|V_i).\ell_i' \qquad (\ell_i' \in L(V_i)).$$

La conditions $m(e,x) = x$ pour toute section x de $E(X)$ ($X \in \mathrm{ob}\,\mathrm{Sch}|_S$) est équivalente à la suivante : pour tout $i \in I$ on a

$$(\varphi_i|V_i).\ell_i = \ell_i' \qquad (\ell_i, \ell_i' \in L(V_i)). \tag{5.24}$$

Cela résulte du calcul suivant :

$$m(e', \sigma_i^2|V_i) = m((\sigma_i^1|V_i)\cdot\ell_i, \sigma_i^2|V_i) = (m(\sigma_i^1, \sigma_i^2)|V_i)\cdot\ell_i = (\tau_i|V_i)\cdot(\varphi_i|V_i)\cdot\ell_i,$$

et de la définition de ℓ_i'.

Soit $R \subset \Gamma \times_S \Gamma$ le graphe de inv_Γ. Le morphisme $\pi|R$ envoie R sur la section identité de Γ. Soit e' la section unité de $\pi^\star(E)$, obtenue à partir de la section unité e de E par composition avec π. On pose pour tout $i \in I$

$$e'|R \cap U_i = (\tau_i|R \cap U_i).k_i' \tag{5.25}$$

et

$$\mathrm{inv}_E(\sigma_i^1)|R \cap U_i = (\sigma_i^2|R \cap U_i).k_i \tag{5.26}$$

avec k_i et k'_i dans $L(R \cap U_i)$. La condition

$$e_X = m(x, \mathrm{inv}_E(x)) = m(\mathrm{inv}_E(x), x)$$

pour tout $x \in E(X)$ ($X \in$ ob Sch$|_S$) correspond à la suivante : pour tout $i \in I$, on a

$$(5.27) \qquad (\varphi_i | R \cap U_i).k_i = k'_i.$$

Lemme de nettoyage 5.28. *Soient L et L' deux faisceaux de Zariski en groupes commutatifs sur* Sch$|_S$ *qui induisent des faisceaux en groupes isomorphes sur la sous-catégorie pleine C_S des S-schémas plats. Considérons une extension commutative de Zariski*

$$1 \longrightarrow L \longrightarrow E \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 1$$

d'un S-schéma en groupes commutatifs plat Γ par L. Il existe alors une extension commutative de Zariski E' de Γ par L' telle que :

(a) *E' est scindable si et seulement si E est scindable ;*

(b) *le L'-torseur défini par E' sur C_S coïncide avec le L-torseur défini par E sur C_S.*

Preuve. On exprime le L-torseur E à l'aide du cocycle (g_{ij}) $(i, j \in I)$ à valeurs dans L, donné par un recouvrement ouvert (V_j) $(j \in I)$ de Γ. Par hypothèse, le cocycle (g_{ij}) $(i, j \in I)$ donne lieu à un cocycle à valeurs dans L' qui définit un L'-torseur $E' \to \Gamma$. La condition (b) est alors facilement vérifiée à partir de cette définition de E'. Observons aussi que $\Gamma \times_S \Gamma$, $\Gamma \times_S \Gamma \times_S \Gamma$, $\Gamma' \times_S \Gamma$ et R sont des S-schémas plats. Donc le $L' \times_S L'$-torseur $pr_1^\star(E') \times pr_2^\star(E')$ (au-dessus de $\Gamma \times_S \Gamma$) est isomorphe sur le petit site au $L \times_S L$-torseur $pr_1^\star(E) \times pr_2^\star(E)$. De même, $\pi^\star(E')$ est isomorphe à $\pi^\star(E)$. Pour définir un morphisme

$$m' : pr_1^\star(E') \times pr_2^\star(E') \to \pi^\star(E'),$$

on part de la définition locale (φ_i) $(i \in I)$ de m et on vérifie que l'image $(\varphi'_i) \in \prod L'(U_i)$ satisfait aux conditions (5.22) avec $h'_{ij} \in L'(U_i \cap U_j)$, image de h_{ij} par $L|_{C_S} \simeq L'|_{C_S}$, à la place de h_{ij}, et $g'_{ij} \in (L' \times L')(U_i \cap U_j)$, image de g_{ij} par $L|_{C_S} \simeq L'|_{C_S}$, à la place de g_{ij}. On a ainsi une *définition locale* de m'. L'associativité de m (cf. (5.23)) s'exprime par l'égalité de deux morphismes d'un $L \times_S L \times_S L$-torseur dans un L-torseur au-dessus de $\Gamma \times_S \Gamma \times_S \Gamma$. La définition de m' ci-dessus permet de vérifier l'associativité.

Les conditions (5.24) et (5.25) résultent aussi facilement. Le lemme (5.20) permet de conclure que E' est bien un S-groupe vérifiant (a). c.q.f.d.

Soit G un S-schéma en groupes commutatifs, lisse ; on a alors à partir de (5.11) et de la définition de L'_G

$$L'_G = \prod_{S_0/S} W(Hom_{\mathcal{O}_{S_0}}(\omega^1_{G_0/S_0}, I)), \tag{5.29}$$

si on se restreint à C_S. Etant donné un S-schéma en groupes *plat* Γ et un S-homomorphisme $g_0 : \Gamma_0 \longrightarrow G$, on conclut à partir de la suite exacte de S-faisceaux de Zariski en groupes commutatifs donnée par (5.19), et du lemme de nettoyage (5.28), à l'existence d'un extension de Zariski

$$1 \longrightarrow \prod_{S_0/S} W(N) \longrightarrow E'_\Gamma \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 1, \tag{5.30}$$

où N désigne le $\mathcal{O}_{S_0}$-module $Hom_{\mathcal{O}_{S_0}}(\omega^1_{G_0/S_0}, I)$, telle que les scindages de E'_Γ correspondent aux S-homomorphismes $g : \Gamma \longrightarrow G$ qui prolongent g_0.

Proposition 5.31. *Soient G, N et $W(N)$ comme ci-dessus. Soient Y un S-schéma plat et $g_0 : Y_0 \longrightarrow G$ un S_0-morphisme. Il existe alors un $W(N)$-torseur Zariskien τ_{Y_0} tel que :*

(i) *l'ensemble $\Gamma(U_0, \tau_{Y_0})$ des sections de τ_{Y_0} au-dessus de U_0, (où U_0 désigne un ouvert de Y_0), est en bijection avec l'ensemble des S-morphismes $g_U : U \longrightarrow G$ qui prolongent $g_0|U_0$ (c.à.d. tel que $g_0|U_0 = g_U \circ i_0$, où $i_0 : U_0 \longrightarrow U$ désigne l'immersion canonique) ;*

(ii) *étant donnés un S-morphisme $h : Y \longrightarrow Y'$ et un S_0-morphisme $g'_0 : Y'_0 \longrightarrow G$ tels que $g_0 = g'_0 \circ h_0$, on a alors*

$$\tau_{Y_0} \simeq h_0^*(\tau_{Y'_0}).$$

Preuve. Soit τ_Y le L'_G-torseur de Y construit comme dans (5.18) à partir de g_0. Soit (U_i) $(i \in I)$ un recouvrement ouvert de Y tel qu'il existe des sections (σ_i) $(i \in I)$ avec $\sigma_i \in \Gamma(U_i, \tau_Y)$. Le recouvrement (U_i) de Y donne lieu à un recouvrement $((U_i)_0)$ $(i \in I)$ de Y_0, puisque Y et Y_0 ont même espace sous-jacent. Soit (g_{ij}) $(i, j \in I)$ le 1-cocycle défini à l'aide de (σ_i) $(i \in I)$, à valeurs dans L'_G. Il donne lieu à un 1-cocycle $((g_{ij})_0)$ $(i, j \in I)$ à valeurs dans $W(N)$ qui définit un $W(N)$-torseur τ_{Y_0} vérifiant (i).

(Soit $U \subset Y_0$ un ouvert ; les sections de τ_{Y_0} au-dessus de U correspondent aux S-morphismes $g : Y|U \to G$ qui prolongent $g_0|U$.) Montrons que le $W(N)$-torseur τ_{Y_0} construit à partir de $g_0 = g_0' \circ h_0$ est isomorphe à $h_0^*(\tau_{Y_0'})$. Soit (V_i) $(i \in I)$ un recouvrement ouvert de Y' de sorte que pour chaque V_i on ait un prolongement g_i' de $g_0'|V_i$. Soit (U_i) $(i \in I)$ le recouvrement image inverse du précédent par h. Pour tout $i \in I$ il existe un prolongement

$$g_i = g_i' \circ (h|U_i)$$

de $g_0|V_i$. Le 1-cocycle à valeurs L_G' défini par

$$g_{ij} = (g_i|U_i \cap U_j).(g_j|U_i \cap U_j)^{-1}$$

est l'image inverse du 1-cocycle à valeurs dans L_G'

$$g_{ij}' = (g_i|V_i \cap V_j).(g_j|V_i \cap V_j)^{-1}$$

par h, grâce à (5.11). Ce qui suffit à montrer (ii). c.q.f.d.

Proposition 5.32. *On reprend les notations de* (5.31). *Soient* Γ *un* S*-schéma en groupes commutatifs, plat et* $f_0 : \Gamma_0 \to G$ *un* S_0*-homomorphisme. Soit* E_Γ' *l'extension de* Γ *par* $\prod_{S_0/S} W(N)$ *construite à partir de* f_0, Γ, *et* G (cf. (5.30)). *Il existe alors une extension de Zariski*

$$1 \to W(N) \to E_{\Gamma_0} \to \Gamma_0 \to 1$$

telle que :

(i) $E_\Gamma' = \prod_{\Gamma_0/\Gamma} E_{\Gamma_0}$:

(ii) *le* $W(N)$*-torseur* E_{Γ_0} *(au-dessus de* Γ_0*) est isomorphe au* $W(N)$*-torseur* τ_{Γ_0} *construit à partir de* f_0 (cf. (5.31)) ;

(iii) *Les scindages de* E_{Γ_0} *sont en bijection avec les* S*-homomorphismes* $f : \Gamma \to G$ *qui prolongent* $f_0 : \Gamma_0 \to G$.

Preuve. En ré-écrivant la définition (5.21) de m, et les conditions (5.23), (5.24) et (5.25) correspondant à l'extension E_Γ' de Γ par $\prod_{S_0/S} W(N)$, remplaçant Γ par Γ_0, et tenant compte de la définition de $\prod_{S_0/S} W(N)$, on obtient une extension E_{Γ_0} de Γ_0 par $W(N)$ que satisfait les conditions (i), (ii), et (iii).

(Donnons la description de la loi de composition m de E_{Γ_0}. Notons d'abord que l'on a le diagramme commutatif suivant de S-morphismes

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_0 \times_S \Gamma_0 \arrow[r, "\pi_0"] \arrow[d, "(f_0,f_0)"'] & \Gamma_0 \arrow[d, "f_0"] \\
G \times_S G \arrow[r, "p"] & G
\end{tikzcd}$$

où π_0 est la loi de composition de Γ_0 et p celle de G. L'image inverse $\pi_0^\star(E_{\Gamma_0})$ est un $W(N)$-torseur de Zariski, dont les sections au-dessus d'un ouvert W de $\Gamma_0 \times_S \Gamma_0$, sont en bijection avec les prolongements à $(\Gamma \times_S \Gamma)|W$ de $p(g_0, g_0)|W$, d'après (ii) de (5.31). Etant donnés deux ouverts U et V de Γ_0 et des prolongements g_U et g_V de $g_0|U$ et $g_0|V$ respectivement à $\Gamma|U$ et $\Gamma|V$, le morphisme m fait correspondre à la section de $pr_1^\star(E_{\Gamma_0}) \times pr_2^\star(E_{\Gamma_0})$ donnée par (g_U, g_V) la section de $\pi_0^\star(E_{\Gamma_0})$ donnée par $p(g_U, g_V)$.) c.q.f.d.

Proposition 5.33. *Soient S, X, $(J^{\cdot}, \Phi)$ comme dans (4.1). On suppose S noethérien et affine. Soit G un S-faisceau fppf en groupes commutatifs, localement de présentation finie. Soit*

$$1 \longrightarrow W(N) \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

une extension de Zariski commutative de G par le S-groupe vectoriel $W(N)$, donné par un $\mathcal{O}_S$-module N de type fini. Soit $\overline{\psi} \in G(X)$ tel qu'il existe un S-homomorphisme $\overline{f} : J^{\cdot} \to G$ avec $\overline{\psi} = \overline{f} \circ \Phi$. Etant donneé un relèvement $\psi \in E(X)$ de $\overline{\psi}$, il existe un unique S-homomorphisme $f : J^{\cdot} \to E$ (qui relève $\overline{f}$) vérifiant $\psi = f \circ \Phi$.

(Le fait que Gest localement de présentation finie donne une bijection : $\mathrm{Hom}_{S-gr}(J^{\cdot}, G) \simeq \varinjlim_n \mathrm{Hom}(J_n^{\cdot}, G)$. L'unicité de f résulte du fait que E est un S-faisceau fppf. En effet, la proposition (4.9) reste valable si l'on suppose seulement que G est un S-faisceau fppf.)

La preuve de (5.33) va résulter des lemmes suivants.

Lemme 5.34. *Avec les mêmes notations et hypothèses que dans* (5.33), *si l'on suppose en plus que $S = \operatorname{Spec} A$, où A désigne un anneau noethérien, et que N est isomorphe au $\mathcal{O}_S$-module défini par $A/P \times \ldots \times A/P$, où P est un idéal premier de A, il existe un S-homomorphisme $f : J^{\cdot} \to E$ tel que $\psi = f \circ \Phi$.*

Preuve. Par hypothèse, il existe un entier $n \geq 0$ et un S-homomorphisme $\overline{f}_n : J_n^{\cdot} \to G$ tels que

$$\overline{\psi} = \overline{f}_n \circ \Phi_n.$$

On obtient pour tout entier $m \geq n$ une extension de Zariski

$$(*) \qquad 1 \longrightarrow W(N) \longrightarrow E \times_G J_m^{\cdot} \longrightarrow J_m^{\cdot} \longrightarrow 1$$

dont les scindages correspondent aux relèvements du S-homomorphisme

$$J_m^{\cdot} \to J_n^{\cdot} \xrightarrow{\overline{f}_n} G$$

en un S-homomorphisme

$$f_m : J^{\cdot}_m \longrightarrow E.$$

Notons que l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
& E \times_G J^{\cdot}_m \arrow[dr] & \\
X \arrow[ur, "\psi \times_G \Phi_m"] \arrow[rr, "\Phi_m"] & & J^{\cdot}_m
\end{tikzcd}$$

Posons $S' = \operatorname{Spec} A/P$ et pour tout entier $m \geq n$, posons $E'_m = E \times_G J_m$. Alors E'_n est un faisceau de Zariski (sur le petit site) au-dessus de J_n, qui coïncide avec le prolongement par zéro, du faisceau de Zariski $(E'_n)_{S'}$ au-dessus du sous-espace fermé $(J_n)_{S'}$ de $J^{\cdot}_n$. Il est clair que $(E'_n)_{S'}$ est un S'-foncteur en groupes représentable par un S'-schéma en groupes lisse car $W(N)_{S'}$ coïncide avec $G_{aS'} \times \ldots \times G_{aS'}$. On peut donc appliquer le théorème (4.1) dans le cas d'une base intègre, et trouver un entier $m \geq n$ et un homomorphisme $h_m : (J^{\cdot}_m)_{S'} \to (E'_n)_{S'}$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
X_{S'} \arrow[r, "(\psi \times_G \Phi_n)_{S'}"] \arrow[d, "(\Phi_m)_{S'}"'] & (E'_n)_{S'} \arrow[d] \\
(J_m)_{S'} \arrow[ur, "h_m"] \arrow[r] & (J^{\cdot}_n)_{S'}
\end{tikzcd}$$

En conséquence, il existe un S-homomorphisme

$$(J_m)_{S'} \to (E'_m)_{S'}$$

tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(J_m)_{S'} \arrow[r] & (E'_m)_{S'} \arrow[d] \\
X \arrow[u, "(\Phi_m)_{S'}"] \arrow[r, "(\Phi_n)_{S'}"] & (J_m)_{S'}
\end{tikzcd}$$

commute, et donne lieu à un scindage σ de $(E'_m)_{S'}$. Le prolongement par zéro $\overline{\sigma}$ de σ à $J^{\cdot}_m$ correspond donc à un scindage de E'_m. On vérifie cette affirmation en exprimant la loi de composition de E'_m et la compatibilité avec celle-ci, que doit vérifier un scindage, en termes de (5.20), compte tenu que $pr_1^\star(E'_m), pr_2^\star(E'_m), \ldots$ etc sont le prolongement par zéro de $pr_1^\star(E'_{mS'})$, $pr_2^\star(E'_{mS'})$, ..., etc. On vérifie aussi que le scindage $\overline{\sigma}$ donne bien une factorisation de $\psi \times \Phi_m$, ce qui prouve le lemme. c.q.f.d.

Soit N comme dans (5.33). D'après le théorème 1, p. 136, de [4], il existe une suite de composition (N_i) $(0 \leq i \leq p)$ de N telle que, pour $0 \leq i \leq p-1$, N_i/N_{i+1} soit isomorphe à A/P_i, où P_i est un idéal premier de A. Soit donc $N' \subset N$ un A-sous-module de N tel que $N/N' \simeq A/P$, où P est un idéal premier de A. On a alors un $\mathcal{O}_S$-homomorphisme de faisceaux de Zariski

$$W(N') \longrightarrow W(N).$$

Notons $\overline{W}(N') \subset W(N)$ l'image de (5.47).

Lemme 5.35. *On conserve les hypothèses et les notations de* (5.32) *et celles ci-dessus. Soit* $\tilde{\psi} \in (E/\overline{W}(N'))(X)$ *l'image de* ψ *par* $E \to E/\overline{W}(N')$. *Alors il existe un S-homomorphisme* $\tilde{f} : J \to E/\overline{W}(N')$ *tel que* $\tilde{\psi} = \tilde{f} \circ \Phi$.

Preuve. L'hypothèse sur G donne l'existence d'un entier $n \geq 0$ et d'un S-homomorphisme $\overline{f}_n : J_n \to G$ avec $\overline{\psi} = \overline{f}_n \circ \Phi_n$. On applique ensuite le lemme de nettoyage (5.28) à l'extension de Zariski

$$1 \to W(N)/\overline{W}(N') \to (E/\overline{W}(N')) \times_G J^{\cdot}_n \to J^{\cdot}_n \to 1,$$

en observant que le S-faisceau de Zariski $W(N)/\overline{W}(N')$ est isomorphe sur C_S à $W(N/N') \simeq W(A/P)$. On obtient ainsi une certaine extension E' de $J^{\cdot}_n$ par $W(N/N')$ telle qu'il existe une section $\psi' \in E'(X)$ correspondant à $\tilde{\psi} \times_G \mathrm{Id}_{J^{\cdot}_m}$. On conclut, par (5.33) appliqué à E', ψ', à l'existence d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & & E' \arrow[d] \\
X \arrow[urr, "\psi'"] \arrow[r, "\Phi_m"'] & J^{\cdot}_m \arrow[ur] \arrow[r] & J^{\cdot}_n
\end{tikzcd}$$

permettant de montrer que $E' \times_{J'_n} J_m$ est une extension scindée, donc $(E/\overline{W}(N')) \times_G J_m$ aussi, et à partir de quoi on montre l'existence d'une factorisation de ψ. c.q.f.d.

Preuve de 5.33. On procède par récurrence sur la longueur d'une suite de composition de N. Soit donc $N' \subset N$ un A-sous-module tel que $N/N' \simeq A/P$. A partir de (5.35) on voit qu'il existe $n \geq 0$, un S-homomorphisme $f_n : J^{\cdot}_n \to E/\overline{W}(N')$ et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, dash] & \bar{W}(N') \arrow[r] & E \arrow[r] & E/\bar{W}(N') \arrow[r] & 1 \\
 & & X \arrow[u, "\psi"] \arrow[ur, "\tilde{\psi}"] \arrow[r, "\Phi_n"] & J^{\cdot}_n \arrow[u, "f_n"'] &
\end{tikzcd}$$

Soit $E^\star = E \times_{E/\overline{W}(N')} J_n$. On a alors une section $\psi \times_{E/\overline{W}(N')} \Phi_n$ de $E^\star$ au-dessus de X. On applique à $E^\star$ le lemme de nettoyage et on obtient une extension E' de $J^{\cdot}_n$ par $W(N')$, et (5.45) résulte alors de l'hypothèse de récurrence. c.q.f.d.

Preuve du théorème 4.1 dans le cas général. On procède par récurrence sur la longueur de la suite de composition donnée par (5.1). Avec les notations de (5.4) on a pour chaque entier $m \geq n$ un S_0-homomorphisme $(\overline{\psi}_m)_0 : (J^{\cdot}_m)_0 \to G_0$ tel que $\psi_0 = (\overline{\psi}_m)_0 \circ (\Phi_m)_0$. Soit τ_{X_0} le $W(N)$-torseur de Zariski, où $N = Hom_{\mathcal{O}_{S_0}}(\omega^1_{G_0/S_0}, I)$, construit d'après (5.30) à partir de X_0, ψ_0 et G. Noter que si $I = I_{i+1}/I_i$ alors il existe un idéal premier P_i tel que $I_{i+1}/I_i \simeq A/P_i$ (cf. (5.1)). D'où quitte à se restreindre à un ouvert affine de S_0, on peut supposer que $Hom_{\mathcal{O}_{S_0}}(\omega^1_{G_0/S_0}, I)$ est isomorphe au $\mathcal{O}_{S_0}$-module donné par un produit fini $A/P_i \times \ldots \times A/P_i$. (Noter que $\omega^1_{G_0/S_0}$ est localement libre car G_0 est lisse sur S_0.) Soit σ la section de τ_{X_0} au-dessus de X_0 donnée par le prolongement ψ à X de $\psi_0 : X_0 \to G$ (cf. (5.30), (i)). Soit

$$1 \longrightarrow W(N) \longrightarrow E_{(J^{\cdot}_m)_0} \longrightarrow (J^{\cdot}_m) \longrightarrow 1$$

la suite exacte qui correspond à $(\overline{\psi}_m)_0$ d'après (5.31). Par (5.30), (ii), on a pour tout $m \geq n$ un isomorphisme

$$\tau_{X_0} \simeq (\Phi_m)_0^\star (E_{(J^{\cdot}_m)_0}).$$

Il en résulte alors le diagramme commutatif suivant de S_0-morphismes

$$\begin{tikzcd}
\tau X_0 \arrow[r] \arrow[d] & E_{(J_n)_0} \arrow[d] \\
X_0 \arrow[r, "(\Phi_n)_0"] \arrow[ur, "\sigma'"] & (J^{\cdot}_n)_0
\end{tikzcd}$$

où σ' correspond à la section σ. On peut appliquer (5.33) à l'extension $E_{(J^{\cdot}_n)_0}$ munie de la section σ' de $E_{(J^{\cdot}_n)_0}$ au-dessus de X_0. Il existe alors un entier $m \geq n$ et un S_0-homomorphisme $f : (J_m)_0 \to E_{(J_n)_0}$ tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd}
f : (J_m)_0 \arrow[r] \arrow[d, "(\Phi_m)_0"'] & E_{(J^{\cdot}_n)_0} \arrow[d] \\
(\Phi_n)_0 : X_0 \arrow[r] \arrow[ur, "\sigma'"] & (J_n)_0
\end{tikzcd}$$

comme $E_{(J^{\cdot}_m)_0} \simeq E_{(J_n)_0} \times_{(J^{\cdot}_n)_0} (J^{\cdot}_m)_0$ d'après (5.31), (ii) il résulte alors que f donne lieu à un scindage de cette extension qui correspond à un S-homomorphisme $\overline{\psi}_m : J_m \to G$ tel que $\psi = \overline{\psi}_m \circ \Phi_m$. Ce qui achève la preuve de (4.1).

Remarque 5.36. (i) La preuve de (4.1) ne dépend en fait que de (5.33). Dans une première version de ce travail la démonstration de (4.1) utilisait (5.32) et se faisait donc par une double récurrence sur l'ordre de nilpotence du radical de A et la longueur d'une suite de composition de N. La démonstration actuelle par récurrence sur la longueur d'une suite de composition comme dans (5.1) suit une suggestion de P. Cartier.

(ii) La description de l'extension E_{Γ_0} joue un rôle primordial dans ce travail. Voir à ce sujet l'article de L. Breen dans ce volume et B. Magneron, *Cohomologie des groupes et des espaces de transformation* dans Journal of Algebra, vol. 112, n°2, 1988.

REFERENCES

[1] C.E. Contou-Carrère, *La jacobienne généralisée d'une courbe relative ; construction et propriété universelle de factorisation*, C.R.A.S., t. **289**, 1979.

[2] C.E. Contou-Carrère, *Corps de classes local géométrique relatif*, C.R.A.S., t. **292**, 1981.

[3] C.E. Contou-Carrère, *Jacobienne locale, groupe de bivecteurs de Witt universel et symbole local modéré.* (à paraître aux C.R.A.S.)

[3]bis C.E. Contou-Carrère, *Jacobienne locale d'une courbe formelle relative* (à publier dans A.S.E.N.S.).

[4] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, chapitres 3 et 4, Hermann 1961.

[5] M. Demazure et P. Gabriel, *Groupes algébriques*, North Holland 1971.

[6] M. Demazure et A. Grothendieck, SGA III (schémas en groupes), vol n°1, Springer Verlag LN, n°**151**.

[7] A. Grothendieck, *Fondements de la géométrie algébrique*, Recueil des Exposés du séminaire Bourbaki entre 1957 et 1962.

[8] A. Grothendieck et J. Dieudonné, *Eléments de géométrie algébrique* (EGA) I, Springer Verlag 1971.

[9] A. Grothendieck et J. Dieudonné, EGA II, *Etude globale élémentaire de quelques classes de morphismes.* Publications Mathématiques de l'I.H.E.S., vol n°**8**.

[10] A. Grothendieck et J. Dieudonné, EGA III, *Etude cohomologique des faisceaux cohérents* (première partie). Publications Mathématiques de l'I.H.E.S., vol n°**11**.

[11] A. Grothendieck et J. Dieudonné, EGA III (deuxième partie), Publications Mathématiques de l'I.H.E.S., vol n°**17**.

[12] A. Grothendieck et J. Dieudonné, EGA IV, *Etude locale des schémas* (deuxième partie). Publications mathématiques de l'I.H.E.S., vol n°**24**.

[13] A. Grothendieck et J. Dieudonné, EGA IV (troisième partie). Publications Mathématiques de l'I.H.E.S., vol n°**28**.

[14] A. Grothendieck et J. Dieudonné, EGA IV (quatrième partie). Publications Mathématiques de l'I.H.E.S., vol n°**32**.

[15] A. Grothendieck (E. Artin, P. Deligne ... etc), SGA IV, vol 3, Springer Verlag LN n°**305**.

[16] J.-P. Serre, *Groupes algébriques et corps de classes*, Hermann 1959.

[17] D. Mumford, *Abelian Varieties*, Oxford University Press, 1970.

Las Rebes 10/A
556, Avenue Louis Ravas
34000 Montpellier, France