MÉMOIRES DE LA S. M. F.

JEAN GIRAUD

Méthode de la descente

Mémoires de la S. M. F., tome 2 (1964)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1964__2__R3_0>

© Mémoires de la S. M. F., 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Bull. Soc. math. France,
Mémoire 2, 1964, VIII + 150 p

METHODE DE LA DESCENTE

par Jean GIRAUD

SOMMAIRE

Sommaire III

Introduction V

Bibliographie VII

Pages

1 - Comportement fonctoriel de $Hom_{E/}(E',F)$ et de $\varprojlim_{\leftarrow} (E' \times_E F/E')$. 1

a) Rappels 1

b) Changements de base 10

2 - Foncteurs représentables sur (Cat). 21

3 - Foncteurs représentables sur (Cat)$_{/D}$. 32

4 - Les objets $\Pi_{E/D}(F/E)$ et $\varprojlim_{\leftarrow E/D}(F/E)$. 35

a) Définition et critère d'existence de $\Pi_{E/D}(F/E)$. 35

b) Construction 45

c) Associativité des $\varprojlim_{\leftarrow}$ 48

d) Propriétés fonctorielles 59

5 - Sections cartésiennes et limites projectives de catégories. 64

a) La catégorie fibrée associée à un foncteur P : $E^\circ \to$(Cat) 64

b) Construction du système projectif $\mathfrak{F}$: $E^\circ \to$ (Cat) associé à une E-catégorie fibrée $\varphi : F \to E$ 68

c) Propriétés des constructions précédentes 69

6 - Cribles de descente. 76

a) Les cribles 76

b) Cribles et familles de F-descente 79

c) Topologie de la F-descente universelle 83

7 - Sections cartésiennes et catégories simpliciales. 89

a) Le sorite du *Hom* de deux sections cartésiennes 89

b) Sections cartésiennes d'une catégorie scindée et systèmes transitifs d'isomorphismes 92

c) Réduction à une catégorie simpliciale 97

Pages

d) La catégorie ***Fam (E)***; application aux changements de base simpliciaux. 104

8 - Le Théorème d'échange. 112

9 - Données de recollement et de descente. 118

a) Relatives à un morphismes 118

b) Relatives à une famille de morphismes 131

c) Descente et sommes directes 134

10 - Propriétés des morphismes de descente. 139

a) Propriétés liées au théorème de comparaison 139

b) Propriétés liées au théorème d'échange. 145

INTRODUCTION.

Ayant à rédiger l'exposé VII du Séminaire de Géométrie Algébrique de l'IHES de 1961, qui devait être consacré au formalisme général de la théorie de la descente, nous avons été conduit, et même poussé, à y inclure un certain nombre de considérations qui n'ont qu' un rapport lointain avec la Géométrie. C'est une des raisons pour lesquelles ce travail est présenté de manière autonome, l'autre étant sa date d'achèvement. La Géométrie Algébrique moderne faisant grand usage des techniques de descente, il est bon qu'elles soient exposées en détail. C'est aussi la raison pour laquelle nous ne donnons que peu d'exemples : on en trouvera dans le séminaire susnommé et dans celui de 1963.

Le paragraphe a) du numéro 1 rappelle quelques définitions de SGAVI et, en particulier, celle de foncteur fibrant qui est fondamentale dans tout ce travail. On y trouvera quelques précisions sur les clivages (choix des images inverses) et sur différentes catégories de foncteurs attachées de manière naturelle à une catégorie fibrée. Quant au paragraphe b), il est centré autour de 1.13. dont la signification est expliquée après l'énoncé.

Le numéro 2 n'a pas de rapport avec les catégories fibrées. On y donne un critère de représentabilité des foncteurs contravariants de (Cat) dans (Ens). La condition évidente de commutation aux limites inductives est ici suffisante. En fait on donne un critère plus maniable, cf.2.6 (iii).

Variations sur le même thème au numéro 3.

A l'aide des résultats des numéros 2 et 3, on résoud complètement dans les deux premiers paragraphes du numéro 4 le problème suivant : "étant donné un foncteur d : $E \to D$, le foncteur changement de base $X \rightsquigarrow X \times_D E$ admet-il un **coadjoint** ?". On notera que l'**adjoint** est fourni par la composition avec d. Le paragraphe c), plus laborieux, résoud un problème analogue, obtenu en remplaçant les foncteurs par les foncteurs **cartésiens.** Pour un énoncé précis, voir 4.7.. En vue du théorème 8.8., le paragraphe d) explicite une propriété fonctorielle des objets ainsi construits.

Le numéro 5 exprime mathématiquement le sentiment général suivant lequel "on peut négliger les isomorphismes de transitivité de l'image

inverse". Toute ***E***-catégorie fibrée est ***E***-équivalente à une ***E***-catégorie scindée, (c'est-à-dire où l'on a transitivité **vraie** de l'image inverse). On a également un résultat plus fin, 5.10., mais qu'il faut manier avec précaution (cf. 5.12.).

Avec le numéro 6, on aborde la théorie de la descente. En utilisant exclusivement les catégories de sections cartésiennes, on peut donner des définitions fort simples, surtout adaptées à l'étude de la descente **universelle,** très fréquente en pratique. Les théorèmes ainsi obtenus à peu de frais (6.16. et 6.25.) devront être précisés au numéro 10.

Les numéros 7 et 8 développent les techniques nécessaires pour passer du langage de 8 à celui de 9. On y trouvera un bref commentaire au début de chaque paragraphe.

Les définitions de 6 sont traduites au numéro 9 dans le langage des "objets munis d'une donnée de descente", plus artisanal et parfois disgracieux, mais plus proche de l'intuition et, surtout, fort utile dans les applications. Pour clarifier l'exposé, le paragraphe a) est limité à l'étude d'un seul morphisme ; le cas des familles s'en déduit au paragraphe suivant.

Le titre du numéro 10 en explique le contenu. Disons simplement que, pour la commodité du lecteur, on y donne les références des résultats déjà obtenus.

Bibliographie

[NB]. BOURBAKI (Nicolas). Topologie générale, Ch. 1. Hermann.

[AS]. GIRAUD (Jean). Analysis Situs. Séminaire Bourbaki 1963, exposé 256.

[FF]. GROTHENDIECK (Alexander) Formalisme général des foncteurs représentables. Séminaire Henri Cartan, 13° année, 1960-61, exposé 11.

[TD]. GROTHENDIECK (Alexander) Techniques de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. Séminaire Bourbaki 1959, exposé 190.

[SGAVI]. GROTHENDIECK (Alexander) Catégories fibrées et descente. Séminaire de géométrie algébrique de l'IHES 1961, n° VI.

[CR]. ROOS (Jean Eric). Sur les foncteurs dérivés de $\varprojlim$. Applications. Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t.252, p. 3702-3704, 12 juin 1961.

[TF]. VERDIER (Jean Louis). Théorie des faisceaux. Séminaire de l'I.H.E.S. 1963-64.

1. Comportement fonctoriel de $Hom_{E/}(E', F)$ et de $\underset{\leftarrow}{Lim}\,(E' \times_E F/E')$.

1. a) Rappels.

Nous allons d'abord rappeler, en les complétant, **les propriétés élémentaires des morphismes cartésiens,** déjà énoncées dans S.G.A.VI.

Soit $f: F \to E$ un foncteur. Nous désignons par les mêmes lettres (s et b) les applications source et but de F et de E. Les éléments de $Fl(F)$ ou de $Ob(F)$ seront affectés d'un ' . Soit $m' \in Fl(F)$ et soit $n \in Fl(E)$. Supposons que

$$b(n) = s(f(m')). \tag{1.1}$$

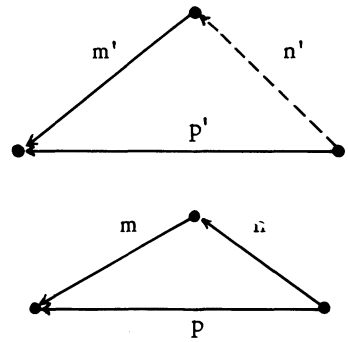
Posons

$$f(m') = m, \qquad mn = p. \tag{1.2.}$$

Considérons la condition :

(1.3) $c(m', n) \Longleftrightarrow$ (quel que soit $p' \in Fl(F)$ tel que $f(p') = p$ et $b(p') = b(m)$, il existe un et un seul $n' \in Fl(F)$ tel que $m'n' = p'$ et $f(n') = n$)

Comme il se doit, lorsque nous écrivons $m'n' = p'$, cela signifie d'abord que $s(m') = b(n')$, i.e. que m' et n' sont composables.



Définition 1.1. Soit $f: F \to E$ un foncteur et soit $m' \in Fl(F)$. On dit que :

(i) m' est **cartésien** (relativement à E) si on a $c(m', n)$, lorsque $n = id_{s(f(m'))}$;

(ii) m' est **hypercartésien** (relativement à E) si on a $c(m', n)$, pour tout $n \in Fl(E)$ tel que $b(n) = s(f(m'))$;

(iii) le foncteur f est **préfibrant si**, pour tout $m \in Fl(\boldsymbol{E})$ et tout $x' \in Ob(\boldsymbol{F})$ tels que $f(x') = b(m)$, il existe $m' \in Fl(\boldsymbol{F})$, m' **cartésien,** tel que $f(m') = m$ et $b(m') = x'$;

(iv) f est **fibrant** s'il est préfibrant et si, de plus, le composé de deux morphismes (de $\boldsymbol{F}$) qui sont cartésiens est un morphisme cartésien, **ou encore** si (iii) est vérifiée lorsqu'on y remplace cartésien par hypercartésien.

Un morphisme hypercartésien est évidemment cartésien.

Lemme 1.2. Soit $f : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$ un foncteur. Soient m' et n' deux flèches composables de $\boldsymbol{F}$: $s(m') = b(n')$.

(i) si m' est hypercartésien, pour que n' le soit il faut et il suffit que le composé m'n' le soit.

(ibis) si n' et m'n' sont cartésiens, on a $c(m', f(n'))$.

(ii) si f est fibrant, tout morphisme cartésien est hypercartésien.

La démonstration de (i) et de (ibis) est triviale. On a démontré (ii) dans S.G.A.VI. 6.11.

Lemme 1.3. Soit un diagramme de (Cat) :

(1.4)

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{g'} & F' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ E & \xrightarrow{g} & E' \end{array}$$

dans lequel $\boldsymbol{F}'$ est un **produit fibré** de $\boldsymbol{F}$ et de $\boldsymbol{E}'$ au dessus de $\boldsymbol{E}$. Soit $m \in Fl(\boldsymbol{F}')$.

(i) pour que m soit $\boldsymbol{E}$-cartésien il faut et il suffit que g'(m) et f'(m) le soient;

(ii) pour que m soit $\boldsymbol{E}'$-cartésien, il faut et il suffit que g'(m) soit $\boldsymbol{E}$-cartésien.

Cf. S.G.A.VI. 6.3. et 6.6..

Si, dans 1.3 (i), on remplace "cartésien" par "hypercartésien", le "il suffit" subsiste, mais pas le "il faut".

Corollaire 1.4. Si le carré (1.4) est un produit fibré de catégories, et si le foncteur f est fibrant, le foncteur f' l'est aussi.

Remarque 1.5. Rappelons que, d'après SGA VI 7.1., si

$$f : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$$

est un foncteur, il y a une **correspondance biunivoque entre l'ensemble des clivages de** f (on dit aussi de $\boldsymbol{F/E}$) **et l'ensemble des parties** K **de** Fl $(\boldsymbol{F})$ **telles que :**

a) tout $m' \in K$ est cartésien,

b) pour toute flèche $m: T \to S$ de $\boldsymbol{E}$ et tout $x \in Ob(\boldsymbol{F})$ tels que $f(x) = S$, il existe un $m' \in K$, **unique,** de but x et tel que $f(m') = m$.

Pour tout **clivage** de f, l'ensemble K qui lui est associé s'appelle l'ensemble des **morphismes de transport.**

Rappelons que pour qu'un clivage soit un scindage il faut et il suffit que l'ensemble des morphismes de transport soit stable par composition. C'est alors l'ensemble des flèches d'une sous-catégorie de $\boldsymbol{F}$ qui a même objets que $\boldsymbol{F}$.

Scholie 1.6. Soit c un clivage d'un foncteur fibrant $f : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$. Pour toute flèche $m : T \to S$ de $\boldsymbol{E}$, il définit un foncteur

$$m^c : \boldsymbol{F}_S \to \boldsymbol{F}_T \tag{1.5}$$

où pour tout $X \in Ob(\boldsymbol{E})$, on note $\boldsymbol{F}_X$ la catégorie fibre de f en X. Ce "foncteur image inverse" était noté m^* dans SGA VI 7.1.; nous préféfons inclure c dans la notation. Pour tout $x \in Ob(\boldsymbol{F}_S)$, nous désignerons par

$$c_m(x) : m^c(x) \to x \tag{1.6}$$

le morphisme de transport de but x et de projection m.
Pour tout S-morphisme $a : y \to x$, l'image inverse de a par m est caractérisée par la relation

$$a.c_m(y) = c_m(x).m^c(a). \tag{1.7}$$

Si $U \xrightarrow{n} T \xrightarrow{m} S$ sont deux flèches composables de $\boldsymbol{E}$, le clivage définit un isomorphisme de foncteurs

$$c_{m,n} : n^c.m^c \to (mn)^c. \tag{1.8}$$

Pour tout $x \in Ob(\boldsymbol{F}_S)$, le U-morphisme $c_{m,n}(x)$ est caractérisé par la relation

$$c_{mn}(x).c_{m,n}(x) = c_m(x).c_n(m^c(x)). \tag{1.9}$$

Si $V \overset{p}{\to} U \overset{n}{\to} T \overset{m}{\to} S$ sont trois flèches composables de $\boldsymbol{E}$, on a, pour tout $x \in Ob(\boldsymbol{E})$,

(1.10) $$c_{m,np}(x).c_{n,p}(m^c(x)) = c_{mn,p}(x).p^c(c_{m,n}(x)),$$

ainsi qu'il est prouvé dans SGA VI 7.4.B).

Pour terminer ce scholie, signalons que, lorsque le clivage est explicitement donné comme un **scindage** nous emploierons des notations plus commodes. Pour toute flèche $m : T \to S$ de $\boldsymbol{E}$, nous désignerons par

(1.11) $$m^* : \boldsymbol{F}_S \to \boldsymbol{F}_T$$

le foncteur image inverse relatif à m et, pour tout objet (resp. toute flèche) x de la catégorie fibre $\boldsymbol{F}_S$, nous noterons

(1.12) $$x_m : x^m \to x, \quad x^m = m^*(x),$$

le morphisme de transport de but x **et de projection** m. Pour tout couple $U \overset{n}{\to} T \overset{m}{\to} S$ de flèches composables de $\boldsymbol{E}$, on a

(1.13) $$n^*.m^* = (mn)^*, \quad (x^m)^n = x^{mn} \quad \text{et} \quad x_{mn} = x_m.(x^m)_n .$$

Nous allons maintenant donner un procédé de calcul des sections cartésiennes d'une $\boldsymbol{E}$-catégorie **scindée.** Soit donc $f : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$ une $\boldsymbol{E}$-catégorie munie d'un scindage noté comme il vient d'être dit. Soit $x : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ une section cartésienne de f.

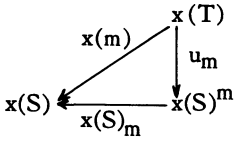
Pour tout $S \in Ob(\boldsymbol{E})$, posons

(1.14) $$x_S = x(S), \quad x_S \in Ob(\boldsymbol{F}_S),$$

Pour toute flèche $m : T \to S$ de $\boldsymbol{E}$, il existe un T-isomorphisme

(1.15) $$u_m : x_T \to x_S{}^m$$

caractérisé par



(1.16) $$(x_S)_m.u_m = x(m)$$

En effet, le morphisme de transport $(x_S)_m = x(S)_m$ a même projection et même but que x(m) et tous deux sont cartésiens. Pour tout couple de flèches composables de $\boldsymbol{E}$, $U \overset{n}{\to} T \overset{m}{\to} S$, on a

(1.17) $$u_m{}^n.u_n = u_{mn} .$$

En effet x est un foncteur. On a donc x(mn) = x(m)x(n), qui se traduit, grâce à (1.16), par

$$(x_S)_{mn}.u_{mn} = (x_S)_m.u_m.(x_T)_n.u_n .$$

Avec les notations utilisées pour un scindage, la formule (1.7) donne

$$u_m.(x_T)_n = (x_S{}^m)_n.u_m{}^n ,$$

et, d'après (1.13), on en déduit

$$(x_S)_{mn}.u_{mn} = (x_S)_{mn}.u_m{}^n.u_n ,$$

qui prouve (1.17), car $(x_S)_{mn}$ est cartésien et, de plus, les deux membres de (1.17) sont des U-morphismes.

Proposition 1.7. Soit $\varphi : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$ une catégorie munie d'un scindage

(i) Les formules (1.14) et 1.16) établissent une bijection entre l'ensemble des sections cartésiennes de f et l'ensemble des familles (x_S,u_m), $S \in Ob(\boldsymbol{E})$, $m \in Fl(\boldsymbol{E})$, $x_S \in Ob(\boldsymbol{F}_S)$, $u_m \in Isom_T(x_T,x_S{}^m)$, vérifiant (1.17) pour tout couple (m,n) de flèches composables de $\boldsymbol{E}$.

(ii) De plus, si x et y sont deux sections cartésiennes de f et si

$$(x_S,u_m) \quad \text{et} \quad (y_S,v_m)$$

désignent les familles qui leur sont ainsi associées, pour qu'une famille $(a_S)_{S \in Ob(\boldsymbol{E})}$ de S-morphismes $a_S : y_S \to x_S$ définisse un morphisme de sections cartésiennes $a : y \to x$, il faut et il suffit que, pour toute flèche $m : T \to S$ de $\boldsymbol{E}$, on ait

$$u_m.a_T = a_S{}^m.v_m . \tag{1.18}$$

Démonstration :

(i) Pour construire la section cartésienne correspondant à une telle famille, on utilise les formules (1.14) et (1.16). Il suffit de vérifier que pour tout couple (m,n) de flèches composables de $\boldsymbol{E}$, on a $x(mn) = x(m)x(n)$, ce qui résulte de (1.17) en remontant les calculs précédents.

(ii) La seconde assertion signifie que, pour toute flèche $m : T \to S$ de $\boldsymbol{E}$, la relation (1.18) équivaut à $a_S.y(m) = x(m).a_T$. D'après (1.16) celle-ci équivaut à

$$a_S.(y_S)_m.v_m = (x_S)_m.u_m.a_T \tag{1.19}$$

qui, d'après (1.7) équivaut à

$$(x_S)_m.a_S{}^m.v_m = (x_S)_m.u_m.a_T ,$$

laquelle équivaut à (1.18), car $(x_S)_m$ est cartésien et les deux membres de (1.18) sont des T-morphismes.

C.Q.F.D.

Lemme 1.8. Soit f: $F \to E$ un foncteur et soit K une partie de $Fl(F)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f est fibrant et K définit un clivage de f;

(ii) tout $m' \in K$ est **hypercartésien** et, pour tout $m \in Fl(E)$ et tout $x' \in Ob(F)$ tels que $f(x') = b(m)$, il existe un, et un seul, $m' \in K$ tel que $b(m') = x'$ et $f(m') = m$.

Rappelons d'abord que, pour que f admette un clivage, il faut et il suffit que f soit préfibrant. (S.G.A.VI.7.2). Le lemme résulte facilement de là et de 1.1.;

Lemme 1.9. Reprenons le diagramme (1.4) de 1.3., en supposant encore que F' soit un produit fibré de F et de E' au dessus de E. Soit $K \in Fl(F)$ et soit

$$K' = \{m \in Fl(F') \mid g'(m) \in K\} \tag{1.20}$$

Si f et K vérifient les conditions de 1.8. il en est de même de f' et K'.

Résulte de 1.3..

Ceci dit, rappelons que, si f: $F \to E$ et g: $G \to E$ sont deux foncteurs, ou, comme on dit parfois, si F et G sont deux E-catégories, on a défini dans S.G.A.VI.2. la catégorie $Hom_{E/}(F,G)$. Dans le cas particulier où $f = id_E$, $F = E$, **nous poserons :**

$$\underline{\Gamma}(G/E) = Hom_{E/}(E,G), \text{ (SGA VI, page 13)} \tag{1.21}$$

et

$$\Gamma(G/E) = \text{Ob}\,[\underline{\Gamma}(G/E)] = \text{Hom}_E(E,G). \tag{1.22}$$

Rappelons que $Hom_{E/}(F,G)$ est une sous-catégorie de $Hom(F,G)$ **non pleine en général.**

Nous désignerons par

$$Hom_{E/}\hat{}(F,G) \tag{1.23}$$

la sous-catégorie pleine de $Hom_{E/}(F,G)$ dont les objets sont les E-foncteurs de F dans G qui **transforment tout morphisme de F en un morphisme cartésien de G.**

Nous désignerons par

$$Hom_{\text{cart}}(F,G) \tag{1.24}$$

la sous-catégorie pleine de $Hom_{E/}(F,G)$ dont les objets sont les E-foncteurs **cartésiens** de F dans G, i.e. les foncteurs qui **transforment tout**

$\underline{\Gamma}$ représente un gamma gras et désigne une catégorie, contrairement à Γ qui désigne son ensemble d'objets.

morphisme E-cartésien de F en un morphisme E-cartésien de G.

$$\underset{\text{plein}}{Hom_{E/}\hat{}(F,G)} \subset \underset{\text{plein}}{Hom_{cart}(F,G)} \subset Hom_{E/}(F,G) \subset Hom(F,G)$$

Rappelons que si $F = E$ et si $f = id_E$, on a, par définition,

$$\underset{\leftarrow}{Lim}(G/E) = Hom_{E/}\hat{}(E,G) = Hom_{cart}(E,G). \tag{1.25}$$

Lemme 1.10. Soit $f: F \to E$ un foncteur. Soit

$$i: F^c \to F$$

le foncteur d'inclusion de la catégorie F^c dans la catégorie F, où F^c est la sous-catégorie de F qui a même ensemble d'objets et dont les flèches sont les seules flèches **hypercartésiennes** de F. (C'est une catégorie en vertu de 1.2. (i)). Le foncteur naturel:

$$\underline{\Gamma}(F^c/E) \to \underline{\Gamma}(F/E)$$

induit une bijection entre $\Gamma F^c/E)$ et $Ob(\underset{\leftarrow}{Lim}(F/E))$.
(N.B. ce foncteur est fidèle, mais, en général, il n'est pas pleinement fidèle).

Il suffit de prouver que, si

$$\sigma: E \to F$$

est une **section cartésienne de F/E,** pour tout $m \in Fl(E)$, $\sigma(m)$ est non seulement cartésien mais encore hypercartésien. Soit donc $n \in Fl(E)$ tel que $b(n) = s(m)$. Nous devons vérifier la condition $c(\sigma(m),n)$. Posons

$$m' = \sigma(m), \quad p = mn. \tag{1.26}$$

Soit $p' \in Fl(F)$ tel que $b(p') = b(m')$ et $f(p') = p$.

Par hypothèse, $\sigma(p)$ est cartésien, il existe donc un $q' \in Fl(F)$, **unique,** tel que $\sigma(p)q' = p'$ et $f(q') = id_{s(p)}$. Si l'on pose $n' = \sigma(n)q'$, on a

$$m'n' = p' \quad \text{et} \quad f(n') = n. \tag{1.27}$$

S'il existe $n'' \in Fl(F)$ tel que $m'n'' = p'$ et $f(n'') = n$, il existe $q'' \in Fl(F)$ tel que $n'' = \sigma(n)\, q''$ et $f(q'') = id_{s(n)}$, car $\sigma(n)$ est cartésien. On en déduit que

$$p' = \sigma(m)n'' = \sigma(m)\sigma(n)q'' = \sigma(p)q''$$

donc $q'' = q'$, car $\sigma(p)$ est cartésien, donc $n'' = n'$.

C.Q.F.D.

Lemme 1.11. Soit $\mathbb{U}$ un univers, soit I une $\mathbb{U}$-catégorie et soit $X : I^{o} \to (Cat)$ un foncteur. Soit $\boldsymbol{E}$ une $\mathbb{U}$-catégorie et soit, pour tout $i \in Ob(I)$, un foncteur $m(i) : X(i) \to \boldsymbol{E}$.

Supposons que les m(i) fassent de $\boldsymbol{E}$ une limite inductive du foncteur X.

(i) pour toute $\mathbb{U}$-catégorie $\boldsymbol{F}$, le foncteur

$$\boldsymbol{Hom(E,F)} \to \underleftarrow{lim}(\boldsymbol{Hom}(X(i),\boldsymbol{F}),$$

induit par composition avec les m(i), est un isomorphisme.

(ii) pour toute $\boldsymbol{E}$-catégorie $\varphi : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$, le foncteur

$$\Gamma(\boldsymbol{F/E}) = \boldsymbol{Hom_{E/}}.(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F}) \to \underleftarrow{lim}\ \boldsymbol{Hom_{E/}}.(X(i),\boldsymbol{F})$$

induit par composition avec les m(i) est un isomorphisme,

(iii) Si le composé de deux morphismes $\boldsymbol{E}$-cartésiens de $\boldsymbol{F}$ est $\boldsymbol{E}$-cartésien (par exemple si φ est fibrant), le foncteur

$$m : \underleftarrow{Lim}(\boldsymbol{F/E}) \to \underleftarrow{lim}\ \boldsymbol{Hom_{E/}}.\hat{}(X(i),\boldsymbol{F})$$

induit par le précédent est un isomorphisme.

Prouvons (i). Par définition d'une limite inductive, ce foncteur est bijectif sur les objets. Pour montrer qu'il l'est sur les flèches, il suffit de savoir que $Ob(\boldsymbol{E})$ est réunion des images par les m(i), $i \in Ob(I)$, des ensembles Ob(X(i)) et que $Fl(\boldsymbol{E})$ est le saturé, pour la loi de composition de $\boldsymbol{E}$, des images par les m(i), $i \in Ob(I)$, des ensembles Fl(X(i)), ce qui est connu.

(ii) résulte aisément de ceci. Prouvons (iii).
Du fait que $\boldsymbol{Hom_{E/}}.\hat{}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{F})$ est une sous-catégorie pleine de $\boldsymbol{Hom_{E/}}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{F})$ pour toute $\boldsymbol{E}$-catégorie $\boldsymbol{F}$, on déduit que le foncteur m est pleinement fidèle et "injectif sur les objets". Qu'il soit "surjectif sur les objets" résulte de la propriété de $Fl(\boldsymbol{E})$ énoncée ci-dessus et du fait que le composé de deux morphismes $\boldsymbol{E}$-cartésiens de $\boldsymbol{F}$ est $\boldsymbol{E}$-cartésien.

Soit S un objet d'une catégorie $\boldsymbol{E}$. Rappelons la définition de "**la catégorie des objets de $\boldsymbol{E}$ au dessus de** S", notée $\boldsymbol{E}_{/S}$. Un objet de $\boldsymbol{E}_{/S}$ "est une flèche de $\boldsymbol{E}$ de but S. Une flèche de $\boldsymbol{E}_{/S}$" est un couple $U \xrightarrow{g} T \xrightarrow{f} S$ de flèches composables de $\boldsymbol{E}$. On la note (f,g), **dans cet ordre.** La source d'une telle flèche est le composé fg et son but est f. Une flèche de $\boldsymbol{E}_{/S}$ de source h et de but f est donc déterminée par une flèche g de $\boldsymbol{E}$ vérifiant fg = h.

Pour que deux flèches (f,g) et (h,k) de $\boldsymbol{E}_{/S}$ soient composables, il faut et il suffit que l'on ait fg = h; leur composé est alors (f,g)(h,k) = (f,gk).

Pour tout $S \in Ob(\boldsymbol{E})$, on a un foncteur

(1.28) $$s_S : \boldsymbol{E}_{/S} \to \boldsymbol{E},$$

défini par son action sur les flèches : $s_S((f,g)) = g$, qui est appelé **le foncteur source.**

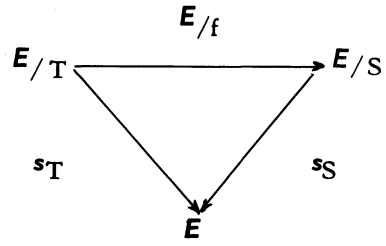
Pour toute flèche $f: T \to S$ de $\boldsymbol{E}$, on a un foncteur

(1.29) $$\boldsymbol{E}_{/f} : \boldsymbol{E}_{/T} \to \boldsymbol{E}_{/S},$$

défini par son action sur les flèches $\boldsymbol{E}_{/f}((g,h)) = (fg,h)$.

Le diagramme ci dessous est commutatif

(1.30)



et, si $U \overset{g}{\to} T \overset{f}{\to} S$ sont deux flèches composables de $\boldsymbol{E}$, on a

(1.31) $$\boldsymbol{E}_{/fg} = \boldsymbol{E}_{/f} \cdot \boldsymbol{E}_{/g}.$$

Autrement dit, en associant à tout $S \in Ob(\boldsymbol{E})$ son foncteur source, (lequel est un objet de $(Cat)_{/\boldsymbol{E}}$), on définit un foncteur

(1.32) $$\boldsymbol{E}_{/} : \boldsymbol{E} \to (Cat)_{/\boldsymbol{E}}.$$

Les foncteurs source font de $\boldsymbol{E}$ la limite inductive du foncteur

(1.33) $$\boldsymbol{E} \to (Cat), \quad S \rightsquigarrow \boldsymbol{E}_{/S},$$

Lemme 1.12. Soient $\boldsymbol{F} \overset{\varphi}{\to} \boldsymbol{D} \overset{\pi}{\to} \boldsymbol{E}$ deux foncteurs composables. Pour tout $S \in Ob(\boldsymbol{E})$, posons $\boldsymbol{D}^S = \boldsymbol{D} \times_{\boldsymbol{E}} (\boldsymbol{E}_{/S})$ et $\boldsymbol{F}^S = \boldsymbol{F} \times_{\boldsymbol{E}} (\boldsymbol{E}_{/S})$.

Pour tout $S \in Ob(\boldsymbol{E})$, posons

(1.34) $$H(S) = \boldsymbol{Hom}_{\boldsymbol{E}/}(\boldsymbol{D}^S, \boldsymbol{F}), \quad (\text{on a } H(S) \approx \underline{\Gamma}(\boldsymbol{F}^S/\boldsymbol{D}^S),$$

et

(1.35) $$K(S) = \boldsymbol{Hom}_{\boldsymbol{E}/}\hat{}(\boldsymbol{D}^S, \boldsymbol{F}), \quad (\text{on a } K(S) \approx \underset{\leftarrow}{\boldsymbol{Lim}}(\boldsymbol{F}^S/\boldsymbol{D}^S)).$$

La composition avec les foncteurs $\boldsymbol{E}_{/f}$, définit deux systèmes projectifs (foncteurs)

(1.36) $$H : \boldsymbol{E}^o \to (Cat) \quad \text{et} \quad K : \boldsymbol{E}^o \to (Cat)$$

et la composition avec les foncteurs source définit, en vertu de la commutativité des triangles (1.30), deux facteurs

(1.37) $\quad h : \underline{\Gamma}(F/D) \to \underset{\leftarrow}{lim}\, H \quad$ et $\quad k : \underset{\leftarrow}{Lim}(F/E) \to \underset{\leftarrow}{lim}\, K.$

Ce sont des isomorphismes.

Il est aisé de voir que E est limite inductive des catégories $E_{/S}$ au moyen des foncteurs source et que D est limite inductive des catégories D^S au moyen des premières projections. D'après le lemme précédent, h est un isomorphisme et il en est de même de k lorsque le composé de deux morphismes D-cartésiens de F est D-cartésien. En fait k est un isomorphisme sans hypothèse sur F car l'ensemble $Fl(D)$ est **réunion** des images par les premières projections des ensembles $Fl(D^S)$, $S \in Ob(E)$.

1-b) Changements de base.

Soit $f : F \to E$ un foncteur et soit $\lambda : E' \to E$ un foncteur que l'on considère comme un "changement de base". On sait (S.G.A.VI.3. etc..) qu'il existe un isomorphisme fonctoriel en E'.

(1.38) $$\underline{\Gamma}(F \times_E E'/E') \xrightarrow{\sim} Hom_{E/}.(E', F),$$

qui induit un isomorphisme non moins fonctoriel :

(1.39) $$\underset{\leftarrow}{Lim}(F \times_E E'/E') \xrightarrow{\sim} Hom_{E/}.\hat{}(E', F).$$

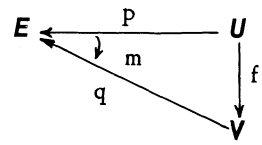
Nous allons admettre entre deux changements de base, i.e. entre deux foncteurs de but E, une assez grande quantité de morphismes. Pour cela il nous faut choisir un univers $\mathbb{U}$, cf. S.G.A.VI.1.. Plus précisément on appelle catégorie des changements de base la catégorie $(Cat)_{//E}$ de de S.G.A.VI.11.B..

Rappelons sa définition .

Un **objet** de $(Cat)_{//E}$ est un couple (U, p), où U est une $\mathbb{U}$-catégorie i.e. une catégorie dont l'ensemble d'objets et l'ensemble de flèches appartiennent à l'univers $\mathbb{U}$, et où $p : U \to E$ est un foncteur.

Une **flèche** de $(Cat)_{//E}$ est un (U, p, f, m, V, q), où U et V sont des $\mathbb{U}$-catégories, où $p : U \to E$, $f : U \to V$ et $q : V \to E$ sont des foncteurs et où $m : p \to qf$ est un morphisme de foncteurs :

1.40)



.

La **source** de cette flèche est $(\boldsymbol{U},p)$ et son **but** est $(\boldsymbol{V},q)$.

Pour que deux flèches $\varphi = (\boldsymbol{U},p,f,m,\boldsymbol{V},q)$ et $(\boldsymbol{W},r,g,n,\boldsymbol{X},s) = \psi$ de $(Cat)//\boldsymbol{E}$ soient composables, il faut et il suffit que

$$s(\varphi) = b(\psi),$$

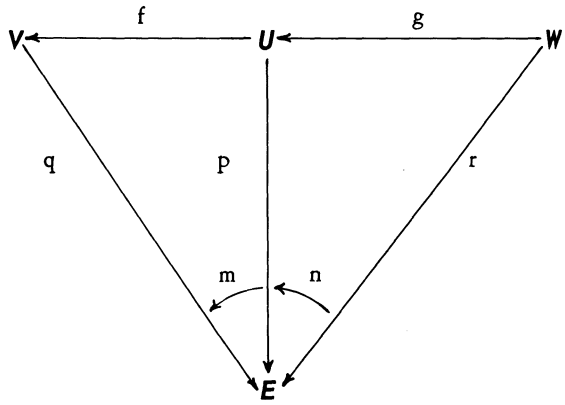
autrement dit :

$$(\boldsymbol{U},p) = (\boldsymbol{X},s),$$

par définition, leur composé est alors:

(1.41) $\varphi.\psi = (\boldsymbol{U},p,f,m,\boldsymbol{V},q)\,(\boldsymbol{W},r,g,n,\boldsymbol{U},p) = (\boldsymbol{W},r,fg,(mg)\overset{*}{\ast}n,\boldsymbol{V},q).$

(1.42)



La formation de $(Cat)//\boldsymbol{E}$ est fonctorielle en $\boldsymbol{E}$. Si

$$\lambda : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$$

est un foncteur, on en déduit un foncteur

(1.43) $$\lambda^* : (Cat)//\boldsymbol{F} \to (Cat)//\boldsymbol{E}$$

en posant, pour toute flèche $(\boldsymbol{U},p,f,m,\boldsymbol{V},q)$ de $(Cat)//\boldsymbol{F}$,

(1.44) $$\lambda^*\,[(\boldsymbol{U},p,f,m,\boldsymbol{V},q)] = (\boldsymbol{U},\lambda p,f,\lambda\ m,\boldsymbol{V},\lambda q).$$

Si $(\boldsymbol{F},\lambda)$ est une $\boldsymbol{E}$-catégorie nous noterons $(Cart)//\boldsymbol{F}/\boldsymbol{E}$ la sous-catégorie pleine de $(Cat)//\boldsymbol{F}$ dont les objets sont les $p : \boldsymbol{U} \to \boldsymbol{F}$ qui transforment tout morphisme de $\boldsymbol{U}$ en un morphisme $\boldsymbol{E}$-cartésien de $\boldsymbol{F}$. Nous noterons

(1.45) $$\lambda^o : (Cart)//\boldsymbol{F}/\boldsymbol{E} \to (Cat)//\boldsymbol{E}$$

la restriction de λ^* à $(Cart)//\boldsymbol{F}/\boldsymbol{E}$.

La proposition suivante est le résultat principal de ce numéro :

Théorême 1.13. Si le foncteur

$$\lambda : F \to E$$

est **fibrant,**

(i) le foncteur $\lambda^* : (Cat)_{//F} \to (Cat)_{//E}$ l'est aussi,

(ii) le foncteur $\lambda^o : (Cart)_{//F/E} \to (Cat)_{//E}$ l'est aussi,

(iii) si, de plus, on se donne un clivage de F sur E, on sait construire de manière canonique (cf. (1.78)) un clivage de $(Cat)_{//F}$ sur $(Cat)_{//E}$ (en abrégé : un clivage de λ^*) et un clivage de λ^o, lequel est induit (cf. (1.77)) par celui de λ^*.

Indiquons rapidement pourquoi cette proposition justifie le titre de ce numéro.

Les catégories fibres (S.G.A.VI.4.) **des foncteurs** λ^* **et** λ^o **sont remarquables.** En effet, il est clair que la fibre de λ^* au dessus de $(U,p) \in Ob((Cat)_{//E}$ s'identifie à la catégorie $Hom_{E/}.(U,F)$, ou encore à $\underline{\Gamma}(F \times_E U/U)$. Par cet isomorphisme, la fibre de λ^o, qui est une sous-catégorie pleine de la précédente, se trouve identifiée à $Hom_{E/}.\hat{}(U,F)$, ou encore à $\underleftarrow{Lim}\,(F \times_E U/U)$.

Par définition d'un clivage, (S.G.A.VI.7), à toute flèche de $(Cat)_{//E}$

$$f : (U,p) \to (V,q), \qquad f = (U,p,f,m,V,q),$$

se trouve associé un foncteur "changement de base" sur les fibres correspondantes :

$$f^* : \underline{\Gamma}(F \times_E V/V) \to \underline{\Gamma}(F \times_E U/U), \tag{1.46}$$

du moins **lorsque l'on a choisi un clivage de** f. Ceci d'après 1.13.(iii). Ce foncteur induit un autre foncteur changement de base :

$$f^o : \underleftarrow{Lim}\,(F \times_E V/V) \to \underleftarrow{Lim}\,(F \times_E U/U), \tag{1.47}$$

de plus, si f et g sont deux flèches composables de $(Cat)_{//E}$, il existe un isomorphisme de foncteurs, bien déterminé par le clivage de f :

$$c^*_{f,g} : g^* f^* \to (fg)^*, \tag{1.48}$$

qui induit un isomorphisme de foncteurs :

$$c^o_{f,g} : g^o f^o \to (fg)^o, \tag{1.49}$$

de manière que la condition S.G.A.VI.7.4.B). soit vérifiée.

En l'occurence, le point de vue des foncteurs changements de base n'étant pas très adéquat, nous utiliserons la remarque 1.5. pour démontrer 1.13.

La première étape de la démonstration consiste à déterminer les morphismes hypercartésiens de $(Cat)_{//\boldsymbol{F}}$ sur $(Cat)_{//\boldsymbol{E}}$.

Lemme 1.14. Soit $\lambda : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$ une $\boldsymbol{E}$-catégorie. Pour qu'un morphisme $f' = (\boldsymbol{U},p,f,m,\boldsymbol{V},q)$ de $(Cat)_{//\boldsymbol{F}}$ (resp. $(Cart)_{//\boldsymbol{F}/\boldsymbol{E}}$ soit **hypercartésien relativement à** $(Cat)_{//\boldsymbol{E}}$, **il faut et il suffit que,** pour tout $X \in Ob(\boldsymbol{U})$ le morphisme de $\boldsymbol{F}$:

$$m(X) : p(X) \to qf(X)$$

soit **hypercartésien relativement à** $\boldsymbol{E}$.

L'énoncé analogue où l'on remplace hypercartésien par cartésien est faux.

Démontrons que la condition est suffisante. On peut oublier le "resp." car $(Cart)_{//\boldsymbol{F}/\boldsymbol{E}}$ est une sous-catégorie pleine de $(Cat)_{//\boldsymbol{F}}$ et, par suite, un morphisme de la première qui est hypercartésien dans la seconde l'est aussi dans la première : "il y a moins de conditions à vérifier".

Posons

$$f = \lambda^*(f') = (\boldsymbol{U},\lambda p,f,\lambda m,\boldsymbol{V},\lambda q). \tag{1.50}$$

Pour tout $g \in Fl((Cat)_{//\boldsymbol{E}})$ tel que

$$b(g) = s(f), \tag{1.51}$$

il nous faut prouver que la condition $c(f',g)$ de (1.3) est vérifiée.

Posons

$$fg = h, \tag{1.52}$$

et soit $h' \in Fl((Cat)_{//\boldsymbol{F}})$ tel que

$$b(h') = b(f') \tag{1.53}$$

et tel que

$$\lambda^*(h') = h. \tag{1.54}$$

Il nous faut prouver qu'il existe un $g' \in Fl((Cat)_{//\boldsymbol{F}})$, unique, tel que:

$$f'g' = h' \tag{1.55}$$

$$\lambda^*(g') = g, \tag{1.56}$$

En vertu de (1.53), h' est de la forme :

$$h' = (\boldsymbol{T},t,h,k,\boldsymbol{V},q). \tag{1.57}$$

On a donc «

(1.58) $$\mathfrak{h} = (\boldsymbol{T},\lambda t,h,\lambda k,\boldsymbol{V},\lambda q).$$

Il resulte de (1.51) et de (1.52) que $\mathfrak{g}$ est de la forme :

(1.59) $$\mathfrak{g} = (\boldsymbol{T},\lambda t,g,n,\boldsymbol{U},\lambda p).$$

En vertu de (1.52), on a :

(1.60) $$fg = h \quad \text{et} \quad (\lambda mg)*n = \lambda k.$$

Il nous faut trouver $\mathfrak{g}' = (\boldsymbol{A},a,g',n',\boldsymbol{B},b)$.

En vertu de (1.56), il faut que $s(\mathfrak{g}') = s(\mathfrak{h}')$, donc

$$(\boldsymbol{A},a) = (\boldsymbol{T},t),$$

il faut aussi que $b(\mathfrak{g}') = s(\mathfrak{f}')$, donc :

$$(\boldsymbol{B},b) = (\boldsymbol{U},p),$$

et enfin :

(1.61) $$fg' = h, \qquad (mg)*n' = k.$$

En vertu de $\lambda^*(\mathfrak{g}') = \mathfrak{g}$. il faut que

(1.62) $$g' = g \quad \text{et} \quad \lambda n' = n.$$

Il en résulte que $\mathfrak{g}'$ est nécessairement de la forme :

(1.63) $$\mathfrak{g}' = (\boldsymbol{T},t,g,n',\boldsymbol{U},p).$$

La seule inconnue est finalement un morphisme de foncteurs :

(1.64) $$n' : t \to pg,$$

assujetti à vérifier :

(1.65) $$\lambda n' = n ; \lambda t \to \lambda pg$$

et

(1.66) $$(mg)*n' = k : t \to qfg.$$

Pour tout $X \in Ob(\boldsymbol{T})$, le morphisme $m(g(X)) \in Fl(\boldsymbol{F})$ est **hypercartésien.** Si l'on applique la condition $c(m(g(X)), n(X))$, on trouve qu'il existe un $n'(X) \in Fl(\boldsymbol{F})$, unique, tel que:

(1.67) $$n'(X) : t(X) \to pg(X)$$

(1.68) $$\lambda(n'(X)) = n(X) : \lambda t(X) \to \lambda pg(X)$$

et

(1.69) $$m(g(X))n'(X) = k(X).$$

Il reste à prouver que la famille $(n'(X))_{X \in Ob(\boldsymbol{T})}$ **définit un morphisme de foncteurs,** n', qui vérifiera nécessairement les conditions (1.64), (1,65) et (1.66).

Soit donc une flèche de $\boldsymbol{T}$:

$$u : X \to Y.$$

Il nous faut prouver que :

(1.70) $$n'(Y)t(u) = pg(u)n'(X).$$

Or (1.70) est vraie en projection, ce qui signifie que les images par le foncteur λ des deux membres de (1.70) sont des flèches de $\boldsymbol{E}$ qui sont égales. En effet, cela résulte de (1.68) et du fait que n est un morphisme de foncteurs. On remarque alors que

$$m(g(Y)) : pg(Y) \to qfg(Y)$$

est une flèche **hypercartésienne** de $\boldsymbol{F}$. En appliquant la condition $c(m(g(Y)), \lambda pg(u)n(X))$, ce qui est licite, on est ramené à prouver que :

(1.71) $$m(g(Y))pg(u)n'(X) = m(g(Y))n'(Y)t(u).$$

Or le premier membre de (1.71) est égal à

(1.72) $$qfg(u)m(g(X))n'(X)$$

car $m : p \to qf$ est un morphisme de foncteurs.

En vertu de (1.69), (1.72) est égal à :

(1.73) $$qfg(u)k(X).$$

Par ailleurs, le second membre de (1.71) est égal à

(1.74) $$k(Y)t(u),$$

en vertu de (1.69).

Or, $fg = h$ d'après (1.61) et (1.62), et par ailleurs

$$k : t \to qh$$

est un morphisme de foncteurs. Il en résulte que (1.73) et (1.74) sont égaux, donc (1,70) est vérifiée.

On a ainsi prouvé que la condition de 1.14 est suffisante.

Prouvons qu'elle est nécessaire.

Soit $f' = (\boldsymbol{U}, p, f, m, \boldsymbol{V}, q)$ une flèche **hypercartésienne** de $(Cat_{//\boldsymbol{F}})$ (Resp. $(Cart)_{//\boldsymbol{F}/\boldsymbol{E}}$). Nous devons prouver que, quel que soit $X \in Ob(\boldsymbol{U})$, $m(X) : p(X) \to qf(X)$ est une flèche hypercartésienne de $\boldsymbol{F}$. Nous devons donc prouver que, pour tout $n \in Fl(\boldsymbol{E})$ tel que

(1.75) $$b(n) = s(\lambda(m(X)) = \lambda p(X),$$

la condition c(m(X),n) est vérifiée. Nous allons construire une flèche g de $(Cat)_{//\boldsymbol{E}}$ telle que **la condition** $c(f', g)$, relative à $(Cat)_{//\boldsymbol{F}}$ sur $(Cat)_{//\boldsymbol{E}}$), (Resp. $(Cart)_{//\boldsymbol{F}/\boldsymbol{E}}$ sur $(Cat)_{//\boldsymbol{E}}$), **soit équivalente à la condition** c(m(X),n), relative à $\boldsymbol{F}$ sur $\boldsymbol{E}$.

Désignons par $S \in Ob(\boldsymbol{E})$ la source de n :

$$n : S \to \lambda p(X).$$

Soit $g = (\boldsymbol{S}, s, g, n', \boldsymbol{U}, \lambda p)$ une flèche de $(Cat)//\boldsymbol{E}'$ telle que

- $\boldsymbol{S}$ soit la sous-catégorie de $\boldsymbol{E}$ qui a pour seule flèche la flèche identique de S,s : $\boldsymbol{S} \to \boldsymbol{E}$ étant le foncteur d'inclusion de $\boldsymbol{S}$ dans $\boldsymbol{E}$; (en vertu des axiomes d'un univers, $\boldsymbol{S}$ est une $\mathbb{U}$-catégorie);
- $g : \boldsymbol{S} \to \boldsymbol{U}$ est le foncteur tel que $g(S) = X$;
- $n' : s \to \lambda pg$ est le morphisme de foncteurs tel que

$$n'(S) = n : s(\boldsymbol{S}) = S \to \lambda pg(S) = \lambda p(X).$$

Il est clair que

$$b(g) = s(\lambda^*(f')),$$

et que par suite la condition $c(f', g)$ a un sens. Le lecteur prouvera sans peine qu'elle équivaut à c(m(X),n).

Corollaire 1.15. Soit $\lambda : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$ un foncteur fibrant. Soit $f' \in Fl((Cat)//\boldsymbol{F})$, une flèche **hypercartésienne** par rapport à $(Cat)//\boldsymbol{E}$. Si le but de f' appartient à $Ob(Cart)//\boldsymbol{F}/\boldsymbol{E}$, il en est de même de sa source.

Posons $f' = (\boldsymbol{U}, p, f, m, \boldsymbol{V}, q)$.

Il nous faut prouver que la source $(\boldsymbol{U}, p)$ de f' appartient à $Ob((Cart)//\boldsymbol{F}/\boldsymbol{E})$, c'est-à-dire que, pour toute flèche de $\boldsymbol{U}$:

$$u : X \to Y,$$

p(u) est une flèche $\boldsymbol{E}$-hypercartésienne de $\boldsymbol{F}$. En effet, le foncteur λ est **fibrant,** donc **cartésien équivaut à hypercartésien** (1.2.(ii)).

Or on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} qf(X) & \xrightarrow{qf(u)} & qf(Y) \\ {\scriptstyle m(X)}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle m(Y)} \\ p(X) & \xrightarrow{p(u)} & p(Y) \end{array} .$$

Par hypothèse, $(\boldsymbol{V}, q) \in Ob((Cart)//\boldsymbol{F}/\boldsymbol{E})$, donc qf(u) est cartésien par définition, donc aussi hypercartésien. Par ailleurs f' est hypercartésien donc, d'après 1.14.,m(X) est hypercartésien, donc aussi, d'après 1.2.(i) , le composé qf(u)m(X). Or m(Y) est hypercartésien, donc aussi p(u), toujours d'après 1.2.(i).

Il nous reste à démontrer 1.13.

On sait que tout foncteur fibrant admet un clivage. Soit donc $K \subset Fl(\boldsymbol{F})$ vérifiant la condition 1.8.(ii). **Il nous suffit de trouver une partie K^* de $Fl((Cat)_{//\boldsymbol{F}})$ vérifiant la condition** 1.8.(ii), où l'on remplace le foncteur f de l'énoncé par le foncteur λ^* de (1.18). En effet, si l'on a un tel K^*, posant

$$K^o = \{f' \in K \mid but(f') \in Ob((Cart)_{//\boldsymbol{F}/\boldsymbol{E}})\} \tag{1.76}$$

il résulte de 1.14. et 1.15. que K^o vérifiera également la condition 1.8.(ii), où l'on remplace le foncteur f de l'énoncé par le foncteur λ^o de (1.45).

On aura donc

$$K^o = K^* \cap Fl((Cart)_{//\boldsymbol{F}/\boldsymbol{E}}), \tag{1.77}$$

ce que l'on traduit dans 1.13.(ii)., en disant que **le clivage de λ^o est induit par celui de λ^***,

Posons :

$$K^* = \{(\boldsymbol{U},p',f',m',\boldsymbol{V},q') \in Fl((Cat)_{//\boldsymbol{F}} \mid \text{quel que soit } X \in Ob(\boldsymbol{U}),\ m'(X) \in K\} \tag{1.78}$$

Il est déjà clair que tout $f' \in K^*$ est hypercartésien.

Il nous reste à prouver que, pour tout $(\boldsymbol{V},q') \in Ob((Cat)_{//\boldsymbol{F}})$ et tout $f \in Fl((Cat)_{//\boldsymbol{E}})$ tels que :

$$b(f) = \lambda^*((\boldsymbol{V},q')) = (\boldsymbol{V},\lambda q'), \tag{1.79}$$

il existe un $f' \in K^*$, **unique,** de but $(\boldsymbol{V},q')$, tel que :

$$\lambda^*(f') = f. \tag{1.80}$$

En vertu de (1.79), f est nécessairement de la forme

$$f = (\boldsymbol{U},p,f,m,\boldsymbol{V},\lambda q'). \tag{1.81}$$

Posons pour simplifier :

$$q = \lambda q'. \tag{1.82}$$

Il reste à trouver $f' \in K^*$, qui sera nécessairement de la forme :

$$f' = (\boldsymbol{U},p',f,m',\boldsymbol{V},q'), \tag{1.83}$$

ce qui signifie que les inconnues sont, d'une part, un foncteur

$$p' : \boldsymbol{U} \to \boldsymbol{F} \tag{1.84}$$

tel que

$$\lambda p' = p, \tag{1.85}$$

et, d'autre part, un morphisme de foncteur :

$$m' : p' \to q'f, \tag{1.86}$$

tel que

(1.87) $$\lambda m' = m.$$

Pour tout $X \in Ob(\boldsymbol{U})$, le but de m(X) est égal à

$$\lambda q'f(X) = qf(X).$$

Il existe donc une flèche unique a $\in K$, telle que

$$b(a) = q'f(X) \quad \text{et} \quad \lambda(a) = m(X).$$

Par définition de K^*, **on a nécessairement**

(1.88) $$m'(X) = a \quad \text{et} \quad p'(X) = s(a).$$

Pour tout $u \in Fl(\boldsymbol{U})$, $u : X \to Y$, on doit trouver un morphisme de $\boldsymbol{F}$.

$$p'(u) : p'(X) \to p'(Y),$$

tel que :

$$\lambda(p'(u)) = p(u)$$

et

(1.89) $$m'(Y)p'(u) = q'f(u)m'(X)$$

Or m est un morphisme de foncteurs, on a donc :

$$m(Y)p(u) = qf(u)m(X),$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\lambda(m'(Y))\lambda(p'(u)) = \lambda(q'f(u)m'(X)).$$

Appliquant la condition c(m'(Y),p(u)), ce qui est licite car m'(Y) est hypercartésien, on trouve qu'il existe un tel p'(u) et un seul.

Il reste à vérifier que si $u : X \to Y$ et $v : Y \to Z$ sont deux flèches composables de $\boldsymbol{U}$, avec

$$w = vu,$$

on a

(1.90) $$p'(w) = p'(v)p'(u).$$

Pour cela on multiplie chacun des deux membres de (1.90) par m'(Z), qui est hypercartésien, d'où la conclusion.

C.Q.F.D.

En utilisant 1.9. et en faisant usage de changements de base variés, la proposition 1.13. permet d'étudier un certain nombre de foncteurs. Par exemple, soit

(1.91) $$\lambda : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$$

un foncteur et soit $\boldsymbol{U}$ une catégorie de l'univers $\mathbb{U}$.

Considérons le foncteur :

$$r : \mathbf{Hom}(U,E) \to (\mathrm{Cat})//_E.$$

qui, à toute flèche de $\mathbf{Hom}(U,E)$, i.e. à tout morphisme de foncteurs :

$$m : f \to g,$$

où f et g sont des foncteurs de source U et de but E, **associe** la flèche :

$$(U, f, \mathrm{id}_U, m, U, g)$$

de $(\mathrm{Cat})//_E$. Donc r est un foncteur injectif (mais non pleinement fidèle en général).

Désignons par l^* et par l^o les foncteurs déduits de λ^* et de λ^o ((1.43) et (1.45)) par le changement de base r. Il est clair qu'ils s'identifient respectivement aux foncteurs définis par la composition avec λ

$$l^* : \mathbf{Hom}(U,F) \to \mathbf{Hom}(U,E) \tag{1.92}$$

et

$$l^o, \mathbf{Hom}\hat{}(U,F) \to \mathbf{Hom}(U,E), \tag{1.93}$$

où $\mathbf{Hom}\hat{}(U,F)$ désigne la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Hom}(U,F)$ dont les objets sont les foncteurs $p : U \to F$ tels que, pour tout $u \in \mathrm{Fl}(U)$, p(u) soit une flèche E-cartésienne de F.

Supposons que λ soit fibrant et soit K une partie de $\mathrm{Fl}(F)$ vérifiant 1.8.(ii). Soit

$$k^* = \left\{ f \in \mathrm{Fl}(\mathbf{Hom}(U,F)),\ f = (m : f \to g) \,\middle|\, \text{quel que soit } X \in \mathrm{Ob}(U),\ m(X) \in K \right\}, \tag{1.94}$$

Soit par ailleurs

$$K^o = K^* \cap \mathrm{Fl}(\mathbf{Hom}\hat{}(U,F)), \tag{1.95}$$

on déduit de 1.13. et de 1.9. le corollaire suivant :

Corollaire 1.16. Sous ces conditions :

(i) le foncteur $l^* : \mathbf{Hom}(U,F) \to \mathbf{Hom}(U,E)$ est fibrant,

(ii) le foncteur $l^o : \mathbf{Hom}\hat{}(U,F) \to \mathbf{Hom}(U,E)$ est fibrant,

(iii) les ensembles K^* et K^o definissent des clivages des foncteurs l^* et l^o. (cf. 1.6.)

On peut décrire les foncteurs image inverse relatifs au clivage de l^* et l^o de la manière suivante.

Corollaire 1.17. Soit $\lambda : F \to E$ un foncteur fibrant muni d'un clivage noté c, cf. 1.6.. Soient $s,b : U \rightrightarrows E$ deux foncteurs et soit $m : s \to b$

un morphisme de foncteurs. Désignons par $\mathbf{F}_s$ (resp. $\mathbf{F}_b$) la catégorie déduite de $\mathbf{F}$ par le changement de base s (resp. b).

(i) Il existe un $\mathbf{U}$-foncteur cartésien μ: $\mathbf{F}_b \to \mathbf{F}_s$. tel que, pour tout $X \in Ob(\mathbf{U})$, le foncteur induit par μ sur les fibres en X s'identifie au foncteur image inverse associé par c au morphisme $m(X) \in Fl(\mathbf{E})$.

(ii) Modulo l'identification de sa source (resp. son but) à la catégorie fibre de 1° en s (resp. b), le foncteur $\underset{\leftarrow}{Lim}(\mu) : \underset{\leftarrow}{Lim}(\mathbf{F}_b/\mathbf{U}) \to \underset{\leftarrow}{Lim}(\mathbf{F}_s/\mathbf{U})$ est égal au foncteur image inverse associé à la flèche m de $\mathbf{Hom}(\mathbf{U},\mathbf{E})$ par le clivage de 1°.

Preuve de (i). La projection de $\mathbf{F}_b$ (resp. $\mathbf{F}_s$) sur $\mathbf{F}$ induit un isomorphisme entre la fibre de $\mathbf{F}_b$ (resp. $\mathbf{F}_s$) en X et celle de $\mathbf{F}$ en b(X) (resp. s(X)), par suite (i) a un sens. De plus, la condition qui y figure **définit la rextriction de μ aux catégories fibres.** Soit alors π: $\eta \to \xi$ un morphisme de $\mathbf{F}_b$, de projection p: Y $\to$X. Si π': $\eta' \to \xi'$ designe sa projection sur $\mathbf{F}$, la projection de π' sur $\mathbf{E}$ est b(p): b(Y) $\to$ b(X). Si l'on désigne par κ: $\theta \to \zeta$ la projection sur $\mathbf{F}$ du morphisme $\mu(\pi)$ que l'on veut associer à π, la projection de κ :sur $\mathbf{E}$ doit être s(p): s(Y) $\to$ s(X). Nous savons que $\theta = m(Y)^c(\eta')$ et que $\zeta = m(X)^c(\xi')$.Nous définissons κ par la condition qu'il se projette sur s(p) et par la relation $c_{m(X)}(\xi').\ \kappa = \pi'.\ c_{m(Y)}(\eta')$, ce qui définit $\mu(\pi)$ par sa projection κ sur $\mathbf{F}$ et p sur $\mathbf{U}$.

Pour que $\mu(\pi)$ soit $\mathbb{U}$-cartésien, il faut et il suffit que sa projection sur $\mathbf{F}$, (i.e.κ), soit $\mathbf{E}$-cartésienne ce qui sera vrai si π' l'est, car les morphismes de transport $c_{m(X)}(\xi')$ et $c_{m(Y)}(\eta')$ sont $\mathbf{E}$-hypercartésiens.

D'après la définition du foncteur $m(X)^c$, (1.7), si p est la flèche identique de X, cette définition de $\mu(\pi)$ coïncide avec celle imposée par (i). D'après les propriétés élémentaires des morphismes cartésiens, μ est un foncteur, donc un $\mathbf{E}$-foncteur cartésien.

La preuve de (ii) résulte aisément de cette construction de μ et de celle du clivage de 1°, cf.(1.78) et infra, et (1.94) - Bien entendu, on a un énoncé analogue relatif à 1^*.

2 - Foncteurs représentables sur (Cat).

Soit $\mathbb{U}$ un univers non vide. Supposons de plus que $\mathbf{Z} \in \mathbb{U}$. Rappelons qu'une $\mathbb{U}$-catégorie est une catégorie dont l'ensemble d'objets et l'ensemble d'objets et l'ensemble de flèches appartiennent à $\mathbb{U}$. On appelle (Cat) la catégorie de toutes les $\mathbb{U}$-eatégories. Ce n'est pas une $\mathbb{U}$-catégorie. On appelle (Ens) la catégorie des ensembles qui appartiennent à $\mathbb{U}$.

On note (Simpl) la sous-catégorie pleine de la catégorie des **ensembles finis** dont les objets sont les intervalles $[0,n]$ de $\mathbf{N}$, $n \geqslant o$.

On note (S.Simpl) la sous-catégorie pleine de la catégorie des **ensembles ordonnés** dont les objets sont les Δ_n, $n \in \mathbf{N}$, où Δ_n désigne l'intervalle $[0,n]$ de $\mathbf{N}$, muni de sa relation d'ordre naturelle.

On note (S.S.Simpl) la sous-catégorie de la précédente qui a mêmes objets et dont les morphismes sont les **applications strictement croissantes.**

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit $\mathfrak{A}_n$ la catégorie associée de la manière habituelle à l'ensemble ordonné Δ_n. On a :

$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{A}_n) = \Delta_n \tag{2.1}$$

$$\mathrm{Fl}(\mathfrak{A}_n) = \{(i,j) \in \Delta_n \times \Delta_n \mid i \leqslant j\}, \tag{2.2}$$

la composition des flèches étant définie par

$$(i,j)(j,k) = (i,k), \tag{2.3}$$

où

$$\text{source } (i,j) = j \text{ et but } (i,j) = i. \tag{2.4}$$

On définit de manière évidente un foncteur :

$$\mathbb{E} : (\text{S.Simpl}) \to (\text{Cat}) \tag{2.5}$$

en posant :

$$\mathbb{E}(\Delta_n) = \mathfrak{A}_n \quad \text{etc...} \tag{2.6}$$

Soit $N \in \mathbf{N}$ et soit $(\text{S.Simpl})_N$ la sous-catégorie pleine de (S.Simpl) dont les objets sont les Δ_n, $n \leqslant N$.

On notera :

$$\mathbb{E}_N : (\text{S.Simpl})_N \to (\text{Cat}) \tag{2.7}$$

la restriction de $\mathbb{E}$ à $(\text{S.Simpl})_N$.

Soit par ailleurs

(2.8) $$h : (Cat)^o \times (Cat) \to (Ens)$$
$$(X,Y) \rightsquigarrow \mathrm{Hom}(X,Y)$$

le foncteur bien connu. Il lui correspond, par définition de ***Hom*** de deux catégories, un foncteur :

(2.9) $$h_. : (Cat) \to \mathbf{Hom}((Cat)^o, (Ens))$$
$$Y \rightsquigarrow h_.(Y)$$

où $h_.(Y)$, qui est noté h_Y ou $\mathrm{Hom}(*,Y)$, est défini par :

(2.10) $$h_Y = h_.(Y) = \mathrm{Hom}(*,Y) : (Cat)^o \to (Ens)$$
$$X \rightsquigarrow \mathrm{Hom}(X,Y)$$

On sait que $h_.$ est pleinement fidèle. Nous allons voir que, pour toute catégorie X, il suffit de connaître le composé de h_X avec $\mathbb{E}^o_N$, pour N assez grand, pour connaître X.

Plus précisément, soit

(2.11) $$\mathbb{E}^o_N : (S.Simpl)^o_N \to (Cat)^o$$

le foncteur déduit de $\mathbb{E}_N$ par passage aux catégories opposées. Soit

(2.12) $$\mathbb{E}'_N : \mathbf{Hom}((Cat)^o, (Ens)) \to \mathrm{Hom}((S.Simpl)^o_N, (Ens)$$

le foncteur qui, à tout $u : (Cat)^o \to (Ens)$ associe le composé $u_. \mathbb{E}^o_N : (S.Simpl)^o_N \to (Ens)$.

Considérons enfin le composé

(2.13) $$\mathbb{E}'_N . h_. : (Cat) \to \mathbf{Hom}((S.Simpl)^o_N, (Ens)).$$

Proposition 2.1. Le foncteur $\mathbb{E}'_N . h_.$ est

(i) fidèle si $N \geqslant 1$,

(ii) pleinement fidèle si $N \geqslant 2$,

Remarquons que, par définition de Δ_n, pour tout $n \geqslant 0$ et pour toute $\mathbb{U}$-catégorie X, **l'ensemble :**

$$\mathbb{E}'_N . h_.(X)(\Delta_n) = \mathrm{Hom}(\Delta_n, X)$$

s'identifie canoniquement à l'ensemble des suites :

(2.14) $$X_0 \xleftarrow{f_1} X_1 \xleftarrow{f_2} X_2 \ldots . X_{n-1} \xleftarrow{f_n} X_n$$

de n flèches composables de X, encore noté $Fl^n(X)$. Si, $f \in Hom(\widetilde{\Delta}_n, X)$, on a noté $f_i : X_i \to X_{i-1}$, l'image par f de la flèche (i-1.i) de $\widetilde{\Delta}_n$, pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Nous conviendrons de poser $Fl^o(X)$, $= Ob(X)$, ce qui permet pour tout $n \geqslant 0$, d'identifier $Fl^n(X)$ à $Hom(\widetilde{\Delta}_n, X)$. Une suite de flèches composables telle que (2.14) sera notée $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$.

Soit $F : X \to Y$ un foncteur, par l'identification de $Fl^n(X)$ avec $Hom(\widetilde{\Delta}_n, X)$, on déduit de

$$Hom(\widetilde{\Delta}_n, F) : Hom(\widetilde{\Delta}_n, X) \to Hom(\widetilde{\Delta}_n, Y)$$

une application :

$$Fl^n(F) : Fl^n(X) \to Fl^n(Y) \tag{2.15}$$
$$(f_1, \ldots, f_n) \rightsquigarrow (F(f_1), \ldots, F(f_n)).$$

Ce qui, pour n = 1, prouve 2.1.(i)..

Nous aurons besoin de préciser quelques notations. Considérons les applications suivantes qui sont des morphismes de (S.Simpl) :

$$\begin{aligned}
&q_n^i : \Delta_0 \to \Delta_n, \quad q_n^i(0) = i, \quad 0 \leqslant i \leqslant n \\
&p_n^i : \Delta_{n-1} \to \Delta_n, \quad p_n^i(j) = j \quad \text{si } j < i \\
&\qquad\qquad\qquad\quad p_n^i(j) = j+1 \text{ si } j \geqslant i, \ 0 \leqslant i \leqslant n \qquad (2.16) \\
&d_n^i : \Delta_{n+1} \to \Delta_n, \quad d_n^i(j) = j \quad \text{si } j \leqslant i \\
&\qquad\qquad\qquad\quad d_n^i(j) = j-1 \text{ si } j > i, \ 0 \leqslant i \leqslant n.
\end{aligned}$$

Reprenant l'identification précédente, on peut identifier -

- $h_X . \mathbb{E}(q_n^i)$ à l'application $(f_1, .., f_n) \rightsquigarrow$ but (f_{i+1}), si $0 \leqslant i < n$, ou à l'application $(f_1, \ldots, f_n) \rightsquigarrow$ source (f_i), si $0 < i \leqslant n$;

- $h_X . \mathbb{E}(p_n^i)$ à l'application de $Fl^n(X)$ dans $Fl^{n-1}(X)$ qui, à $(f_1, \ldots f_n)$ associe : $(f_2, \ldots, f_n)$ si $i = 0$

$(f_1, \ldots, f_{n-1})$ si $i = n$

$(f_1, \ldots, f_i f_{i+1}, \ldots, f_n)$ si $0 < i < n$ et $n \geqslant 2$

En particulier on voit que $h_X . \mathbb{E}(q_1^1)$ s'identifie à l'application **source** de X :

$$s_{\mathbf{X}} : Fl(\mathbf{X}) \to Ob(\mathbf{X})$$

et $h_{\mathbf{X}}.\mathbb{E}(q_1^0)$ à l'application **but** de $\mathbf{X}$.

$$b_{\mathbf{X}} : Fl(\mathbf{X}) \to Ob(\mathbf{X}),$$

cependant que $h_{\mathbf{X}}.\mathbb{E}(d_0^0)$ s'identifie à l'application

$$i_{\mathbf{X}} : Ob(\mathbf{X}) \to Fl(\mathbf{X})$$

qui, à tout $x \in Ob(\mathbf{X})$, associe **la flèche identique** id_x de x. Enfin $h_{\mathbf{X}}.\mathbb{E}(p_2^1)$ s'identifie à l'application qui, à deux flèches composables (f_1, f_2), (i.e. telles que $s_{\mathbf{X}}(f_1) = b_{\mathbf{X}}(f_2)$), associe leur **composé** $f_1 f_2$.

Soit $n \in \mathbf{N}, n \geqslant 1$, et soit $t_n^n : \Delta_1 \to \Delta_n$,

l'application définie par :

$$t_n^n(0) = n-1,\ t_n^n(1) = n. \tag{2.17}$$

C'est une flèche de (S.S.Simpl) et l'on a :

$$t_1^1 = id,\ t_2^2 = p_2^0.$$

Le diagramme :

(2.18)

$$\begin{array}{ccc} & \overset{p_n^n}{\longrightarrow} & \\ \Delta_{n-1} & \longrightarrow & \Delta_n \\ {\scriptstyle q_{n-1}^{n-1}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle t_n^n} \\ & \underset{q_1^0}{\longrightarrow} & \\ \Delta_0 & \longrightarrow & \Delta_1 \end{array} \qquad 1 \leqslant n$$

est cocartésien dans (S.Simpl), i.e. vérifie la propriété universelle des sommes amalgamées. De l'identification de $Fl^n(\mathbf{X})$ avec $Hom(\Delta_n, \mathbf{X})$, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et toute $\mathbb{U}$-catégorie $\mathbf{X}$, on déduit que **le transformé du diagramme** (2.18) **par le foncteur** $\mathbb{E}$ **est également cocartésien dans** (Cat), **pour** $n \geqslant 1$. Pour n = 1 les flèches verticales sont l'identité et $p_1^1 = q_1^0$; dans ce cas, notre assertion est bien triviale.

Prouvons maintenant 2.1.(ii). Soit $N \geqslant 2$ et soient $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ deux $\mathbb{U}$-catégories. Soit

$$u : h_{\mathbf{X}}.\mathbb{E}_N \to h_{\mathbf{Y}}.\mathbb{E}_N \tag{2.19}$$

un morphisme de foncteurs. Pour tout n, $0 \leqslant n \leqslant N$, posons :

(2.20) $$u_n = u(\Delta_n) : h_{\boldsymbol{X}}(\widehat{\Delta}_n) \to h_{\boldsymbol{Y}}(\widehat{\Delta}_n).$$

En identifiant $h_{\boldsymbol{X}}(\widehat{\Delta}_n) = \mathrm{Hom}(\widehat{\Delta}_n, \boldsymbol{X})$ à $\mathrm{Fl}^n(\boldsymbol{X})$ on trouve des applications correspondant aux u_n :

(2.21) $$v_n : \mathrm{Fl}^n(\boldsymbol{X}) \to \mathrm{Fl}^n(\boldsymbol{Y}) \quad , 0 \leqslant n \leqslant N.$$

Le premier point est de prouver que v_0 et v_1 définissent un foncteur :

$$v : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}.$$

Pour prouver par exemple que v commute à la composition des flèches, il suffit de remarquer que le diagramme (2.18), pour n = 2, est transformé en un produit fibré d'ensembles par les foncteurs $\vdash_{\mathcal{A}} \mathbb{E}_N$ et $h_{\boldsymbol{Y}} \cdot \mathbb{E}_N$.

On applique alors au morphisme

$$p_1^1 : \Delta_1 \to \Delta_2$$

l'identité qui exprime que u est un morphisme de foncteurs.

Il reste alors à prouver que le morphisme

$$w_n = \mathrm{Hom}(\widehat{\Delta}_n, v) : \mathrm{Hom}(\widehat{\Delta}_n, \boldsymbol{X}) \to \mathrm{Hom}(\widehat{\Delta}_n, \boldsymbol{Y})$$

est égal à u_n, pour $0 \leqslant n \leqslant N$. Ceci résulte de ce que le foncteur $h_{\boldsymbol{Y}} \cdot \mathbb{E}_N$ transforme les diagrammes (2.18), pour $1 \leqslant n \leqslant N$. en des produits fibrés.

Proposition 2.2. Pour $N \geqslant 3$, le foncteur :

$$\mathbb{E}'_N h_{\cdot} : (\mathrm{Cat}) \to \boldsymbol{Hom}((\mathrm{S.Simpl})^{\circ}_N, (\mathrm{Ens}))$$

induit une équivalence de catégories entre (Cat) et la sous-catégorie pleine de $\boldsymbol{Hom}((\mathrm{S.Simpl})^{\circ}_N, (\mathrm{Ens}))$ dont les objets sont les foncteurs :

$$u : (\mathrm{S.Simpl})^{\circ}_N \to (\mathrm{Ens})$$

qui transforment les sommes amalgamées (2.18) de (S.Simpl), pour $2 \leqslant n \leqslant N$, en produits fibrés d'ensembles.

En effet, soit $\boldsymbol{U}$ la catégorie telle que $\mathrm{Ob}(\boldsymbol{U}) = u(\Delta_o)$, $\mathrm{Fl}(\boldsymbol{U}) = u(\Delta_1)$ et qui, de plus, est telle que :

- l'application source $s_{\boldsymbol{U}} : \mathrm{Fl}(\boldsymbol{U}) \to \mathrm{Ob}(\boldsymbol{U})$ est égale à $u(q_1^1) : u(\Delta_1) \to u(\Delta_o)$;
- l'application but $b_{\boldsymbol{U}} : \mathrm{Fl}(\boldsymbol{U}) \to \mathrm{Ob}(\boldsymbol{U})$ est égale à $u(q_1^o) : u(\Delta_1) \to u(\Delta_o)$;

- l'application qui à tout objet X de $\boldsymbol{U}$ associe la flèche identique de X, soit $i_{\boldsymbol{U}}: Ob(\boldsymbol{U}) \to Fl(\boldsymbol{U})$, est égale à :

$$u(d_o^o): u(\Delta_o) \to u(\Delta_1).$$

D'après l'hypothèse faite sur le foncteur u, $u(\Delta_2)$ s'identifie à l'ensemble des couples de flèches "composables" de $\boldsymbol{U}$, ce qui permet de définir la loi de composition de $\boldsymbol{U}$. En effet, soient f_1 et f_2 deux flèches composables de $\boldsymbol{U}$, i.e. soient f_1 et f_2 deux éléments de $u(\Delta_1)$ tels que

$$u(q_1^1)(f_1) = u(q_1^0)(f_2).$$

Il existe un et un seul élément $f \in u(\Delta_2)$ tel que

$$u(p_2^2)(f) = f_1 \quad \text{et} \quad u(p_2^0)(f) = f_2. \tag{2.22}$$

Le composé $f_1 f_2$ est alors égal, par définition, à $u(p_2^1)(f)$.

Pour montrer que l'on a bien défini une catégorie, on remarque déjà que, pour tout n, $1 \leqslant n \leqslant N$, $u(\Delta_n)$ s'identifie à l'ensemble des suites de n flèches "composables" de $\boldsymbol{U}$, i.e. à l'ensemble des suites $(f_1, f_2, \ldots f_n)$ d'éléments de $u(\Delta_1)$ telles que, pour tout i, $1 \leqslant i < n$, on ait :

$$s_{\boldsymbol{U}}(f_i) = b_{\boldsymbol{U}}(f_{i+1}), \quad \text{i.e.} \quad u(q_1^1)(f_i) = u(q_1^0)(f_{i+1}).$$

Pour décrire cette identification, on introduit les applications :

$$t_n^i: \Delta_1 \to \Delta_n \qquad ,1 \leqslant i \leqslant n, \tag{2.23}$$

$$t_n^i(0) = i-1 \qquad t_n^i(1) = i.$$

L'élément $h \in u(\Delta_n)$ qui correspond à la suite ci-dessus est caractérisé par:

$$u(t_n^i)(h) = f_i \qquad , 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{2.24}$$

Ceci résulte, par récurrence sur n, du fait que u transforme le diagramme (2.18) en un produit fibré d'ensembles.

Nous nous contenterons d'indiquer pourquoi la loi que nous avons définie est **associative.** Soit (f_1, f_2, f_3) une suite de trois flèches composables de $\boldsymbol{U}$ et soit $h \in u(\Delta_3)$ l'élément qui leur correspond par (2.24). Si l'on pose

$$f = u(p_3^2)(h) \qquad \text{et} \qquad g = u(p_3^0)(h),$$

on constate que f et g sont les éléments de $u(\Delta_2)$ qui servent à définir les composés :

$$f_1 f_2 = u(p_2^1)(f) \qquad \text{et} \qquad f_2 f_3 = u(p_2^1)(g).$$

Après quoi il est facile de vérifier que $u(p_3^1)$ (h) et $u(p_3^2)$ (h) sont les éléments de $u(\Delta_2)$ qui servent à definir les composés $(f_1f_2)f_3$ et $f_1(f_2f_3)$, d'où la conclusion, comme pourra voir le lecteur pointilleux.

On construit alors, par exemple par récurrence sur n, des isomorphismes :

$$i(n) : u(\Delta_n) \to \mathrm{Hom}(\Delta_n, U)$$

Pour prouver qu'ils définissent un isomorphisme de **foncteurs,** on remarque que tout morphisme dans $(S.Simpl)_N$ est un composé de morphismes p_n^i et d_n^i. On conclut alors sans difficulté.

Ce qui précède va nous permettre de caractériser les foncteurs représentables dans (Cat). En effet, soit

$$F : (Cat)^o \to (Ens)$$

un foncteur. Il est clair que, si F est représentable, il commute aux limites projectives, i.e. transforme les limites inductives dans (Cat) en limites projectives d'ensembles. Nous allons voir que la réciproque est vraie.

Supposons que le composé $F.\mathbb{E}_3$ transforme les sommes amalgamées du type (2.18), pour n = 2 et n = 3, en produits fibrés. D'après ce qui précède, il existe une catégorie ***RF*** et un isomorphisme de foncteurs :

$$i : \mathrm{Hom}(*, RF).\mathbb{E}_3 \to F.\mathbb{E}_3. \tag{2.25}$$

Il suffit de prouver que i **se prolonge** en un isomorphisme :

$$j : \mathrm{Hom}(*, RF) \to F. \tag{2.26}$$

Si ce prolongement existe, il sera unique d'après 2.1.. **Nous allons écrire toute catégorie comme limite inductive de catégories isomorphes à Δ_2, et ceci de manière "fonctorielle". Il en résultera que, si F commute aux limites projectives que nous utiliserons, on pourra prolonger i**

Rappelons la définition 4.1. de [F.F] .

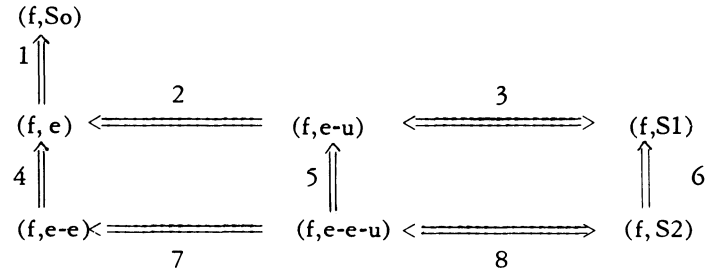
Définition 2.3. Soit **C** une catégorie. Soit $f : X \to Y$ une flèche de **C**. On dit que f est un **épimorphisme effectif** si le produit fibré $X \times_Y X$ existe et si, pour tout $Z \in Ob(\mathbf{C})$, le diagramme d'ensembles :

$$\mathrm{Hom}(Y,Z) \to \mathrm{Hom}(X,Z) \rightrightarrows \mathrm{Hom}(X \times_Y X, Z)$$

est exact. On dit que f est un **épimorphisme effectif universel** si, pour toute flèche $g: Y' \to Y$, le produit fibré $X \times_Y Y'$ existe et si sa seconde projection est un épimorphisme effectif.

Notation 2.4. Lorsque $\mathbf{C}$ = (Cat), on a quelques résultats sur les épimorphismes. Soit $f: X \to Y$ un morphisme dans (Cat). Nous désignerons par (f, Sn) l'assertion " l'application $Fl^n(f): Fl^n(X) \to Fl^n(Y)$ est surjective " (cf. (2.15)). Notons que (f,Sn) est stable par changement de base et entraîne (f,Sn-1). Nous désignerons, dans l'ordre, par (f,e), f,e-e), f,e-u), et (f,e-e-u) les assertions "f est un épimorphisme","f est un épimorphisme effectif", "f est un épimorphisme universel" et "f est un épimorphisme effectif universel".

Proposition 2.5. On a les implications suivantes :



Avant de donner quelques indications sur la démonstration signalons qu'il y a des contre-exemples pour toutes les implications qui ne résultent pas formellement du tableau ci-dessus. Voici, en abrégé, quatre foncteurs et la propriété la plus forte qu'ils vérifient :

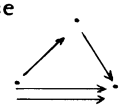
vérifie (f, So)

vérifie (f, e)

vérifie (f,S1) et non (f,e-e)

vérifie (f,e-e) et non (f,e-u)

Pour prouver 1, on teste avec la catégorie $\cdot \rightleftarrows \cdot$.

Pour prouver 8, on effectue les changements de base $\Delta_2 \to Y$ et l'on teste avec la catégorie  .

Les autres assertions sont triviales.

Nous dirons parfois que f **est surjectif sur les suites de** n **flèches composables** pour dire que l'on a (f, Sn).

Nous pouvons maintenant préciser de quelle façon toute catégorie est limite inductive de catégories isomorphes à Δ_2.

Soit X une $\mathbb{U}$-catégorie, soit n un entier $\geqslant 0$. Posons

$$X^n = \coprod_{f \in \mathrm{Hom}(\Delta_n, X)} \Delta_n, \tag{2.27}$$

et, pour tout $f \in \mathrm{Hom}(\Delta_n, X)$, désignons par :

$$sf : \Delta_n \to X^n \tag{2.28}$$

le morphisme structural. Par définition de la somme directe, il existe un et un seul morphisme

$$x^n : X^n \to X \tag{2.29}$$

tel que, pour tout $f \in \mathrm{Hom}(\Delta_n, X)$, on ait :

$$x^n . sf = f. \tag{2.30}$$

Il est clair que, pour toute $\mathbb{U}$-catégorie X, on a (x^n, Sn), donc que x^n est un épimorphisme effectif universel, si $n \geqslant 2$. Pour toute catégorie X, le diagramme

$$X^2 \times_X X^2 \rightrightarrows X^2 \xrightarrow{x^2} X \tag{2.31}$$

est exact dans (Cat). Posons

$$Z = X^2 \times_X X^2, \tag{2.32}$$

a priori, Z n'est pas somme directe de catégories isomorphes à Δ_2. On répète l'opération et l'on considère :

$$z^2 : Z^2 \to Z, \tag{2.33}$$

qui est aussi un épimorphisme effectif universel.

Supposons que le foncteur F de (2.24) transforme **les sommes directes en produits infinis** et les **épimorphismes effectifs universels en noyaux.** Cette dernière condition signifiant que, pour tout épimorphisme effectif universel de (Cat) :

$$f: X \to Y,$$

le transformé par F du diagramme exact de (Cat) :

$$X \times_Y X \rightrightarrows X \to Y$$

est un diagramme exact d'ensembles. Il est clair que l'on pourra prolonger i. D'où le théorème :

Théorème 2.6. Soit $F : (Cat)^o \to (Ens)$ un foncteur.
Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) F est représentable;

(ii) F commute aux limites projectives;

(iii) - (a) - pour n = 2 et n = 3, le foncteur $F.\mathbb{E}_3$ transforme la somme amalgamée (2.18) en un produit fibré.

- (b) - F commute aux produits infinis,

- (c) - pour tout foncteur $f: X \to Y$, surjectif sur les couples de flèches composables, le diagramme d'ensembles obtenu en appliquant F au diagramme de (Cat)

$$X \times_Y X \rightrightarrows X \to Y$$

est **exact.**

Corollaire 2.7. Soit **V** une catégorie telle que, pour tout couple (X,Y) d'objets de **V**, l'ensemble Hom(X,Y) appartienne à l'univers $\mathbb{U}$. Soit $F : (Cat) \to \mathbf{V}$ un foncteur. Pour que F commute aux limites inductives il est nécessaire et suffisant que

a - F commute aux sommes directes,

b - pour n = 2 et pour n = 3, le composé $F.\mathbb{E}$ transforme le diagramme (2.18) en une somme amalgamée,

c - pour tout foncteur $f: X \to Y$, surjectif sur les couples de flèches composables, le diagramme transformé par F de

$$X \times_Y X \rightrightarrows X \to Y \quad \text{soit exact.}$$

En effet, pour que F commute aux limites inductives il faut et il suffit que, pour tout $v \in Ob(\mathbf{V})$, le foncteur

$$h_v.F^o : (Cat)^o \to (Ens)$$

transforme limites inductives de (Cat) en limites projectives d'ensembles.

Corollaire 2.8. Sous les hypothèses de 2.7., soit encore $v \in Ob(\mathbf{V})$. Pour que le foncteur coadjoint de F soit défini (resp. défini en v), il faut et il suffit que le foncteur F commute aux limites inductives (resp. que le foncteur $h_v.F^o: (Cat)^o \to (Ens)$ commute aux limites projectives).

Rappelons simplement que l'on dit que le foncteur coadjoint à F est défini en $v \in Ob(\mathbf{V})$ si le foncteur $h_v.F^o$ est représentable. On dit que le foncteur coadjoint de F est défini s'il l'est pour tout $v \in Ob(\mathbf{V})$.

3 - Foncteurs représentables sur $(Cat)_{/D}$

Dans ce numéro, nous allons étudier ce que devient l'énoncé 2.6. quand on y remplace (Cat) par $(Cat)_{/D}$, où D est une $\mathbb{U}$-catégorie.

Nous allons d'abord établir un théorème d'adjonction qui nous permettra de déduire formellement 3.2. de 2.6..

Soient C une catégorie et D un objet de C. On a défini le "foncteur source".

(3,1) $$s_D : C_{/D} \to C ,$$

par son action sur les flèches

(3.2) $$s_D((f,g)) = g \quad , \text{ cf. (1.28) et infra.}$$

Soit V une catégorie, le foncteur s_D induit par composition un foncteur

(3.3) $$s^* : Hom(C^o,V) \to Hom((C_{/D})^o,V)$$

que nous noterons en abrégé

(3.4) $$s^* : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}.$$

Il est bien connu que, si $s : A \to B$ est un foncteur et si V est une catégorie où les limites inductives existent, le foncteur $s^* : Hom(B^o,V) \to Hom(A^o,V)$, $P \mapsto P.s$, admet un adjoint. Dans le cas présent nous utiliserons un procédé plus fin qui permet, si s est **fibrant**, de construire l'adjoint de s^* en calculant des limites inductives sur **les catégories fibres du foncteur** $s : A \to B$. Ici le foncteur s_D est même scindé et les fibres sont des catégories discrètes (il n'y a que des morphismes identiques), ce qui nous dispensera d'indiquer le procédé général.

Soit $Q \in Ob(\mathcal{Q})$. Pour tout $X \in Ob(C)$, posons

(3.5) $$s_* Q(X) = \coprod_{x \in Hom(X,D)} Q(x),$$

où, pour tout $x \in Hom(X,D)$, le morphisme structural est noté

(3.6) $$s_x : Q(x) \to s_* Q(X) .$$

Pour toute flèche $m : Y \to X$ de C, on définit un morphisme

(3.7) $$s_*Q(m) : s_* Q(X) \to s_* Q(Y)$$

par la condition que, pour tout $x \in Hom(X,D)$, on ait

(3.8) $$s_* Q(m) \cdot s_x = s_{xm} . Q((x,m)) ,$$

On définit ainsi un foncteur $s_* Q : C^o \to V$, autrement dit un objet de $\mathcal{P}$.

On a un morphisme structural

(3.9) $$\sigma Q : Q \to s^{\cdot} s_{\cdot} Q \ ,$$

qui, pour tout objet $x : X \to D$ de $\mathbf{C}_{/D}$, vaut

(3.10) $$\sigma Q(x) = s_x \ , \ s_x : Q(x) \to s^{\cdot} s_{\cdot} Q(x) = s_{\cdot} Q(X).$$

C'est bien un morphisme de foncteurs à cause de (3.8).

Proposition 3.1. Soient $\mathbf{C}$ une $\mathbb{U}$-catégorie, soit $D \in Ob(\mathbf{C})$ et soit $\mathbf{V}$ une catégorie où les sommes directes indexées par un ensemble appartenant à l'univers $\mathbb{U}$ existent. Le foncteur $s^{\cdot}$ de (3.3) admet un adjoint $s_{\cdot}$ définit par (3.9) et (3.10). Pour tout foncteur $P : \mathbf{C}^{o} \to \mathbf{V}$ (resp. $Q : (\mathbf{C}_{/D})^{o} \to \mathbf{V}$), le morphisme σQ de (3.10) induit une bijection :

(3.11) $$Hom(s_{\cdot} Q, P) \to Hom(Q, s^{\cdot} P).$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que (3.11) est bijectif, ce qui prouve la proposition.

Remarquons que si $\mathbf{V} = (Ens)$ il existe un morphisme

(3.12) $$iQ : s_{\cdot} Q \to Hom(*, D),$$

qui, à tout élément de $s_{\cdot} Q(X) = \coprod_{x \in Hom(X,D)} Q(x)$, associe son indice x. Si le foncteur Q est représentable par $r : R \to D$, il est clair que $s_{\cdot} Q$ est représentable par R et que le morphisme r correspond, sur les foncteurs représentés, au morphisme iQ de (3.12). Inversement, si $s_{\cdot} Q$ est représentable par $R \in Ob(\mathbf{C})$, au morphisme iQ correspond un morphisme $r : R \to D$, qui, dans $\mathbf{C}_{/D}$, représente le foncteur Q.

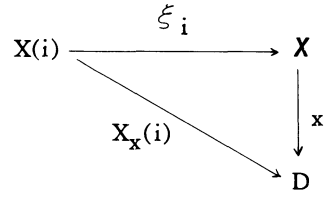
Lorsque $\mathbf{C} = (Cat)$, nous connaissons un critère de représentablité qui fait intervenir les limites inductives de $\mathbf{C}$. Pour obtenir un critère dans le cas de $(Cat)_{/\mathbf{D}}$ il nous faut décrire un procédé de construction de limites inductives dans $\mathbf{C}_{/D}$ à partir de limites inductives dans $\mathbf{C}$.

Soit $X : I^{o} \to \mathbf{C}$ un système inductif, soit $\mathbf{X}$ une limite inductive de X et soient $\xi_i : X(i) \to \mathbf{X}$, $i \in Ob(I)$, les morphismes structuraux. A tout objet $x : \mathbf{X} \to D$ de $\mathbf{C}_{/D}$, nous allons associer un système inductif dans $\mathbf{C}_{/D}$

(3.13) $$X_x : I^{o} \to \mathbf{C}_{/D} \ , \ X_x(i) = x\xi_i \ ,$$

(3.13) (suite)

$$\begin{tikzcd} X(i) \arrow[r, "\xi_i"] \arrow[dr, "X_x(i)"'] & \boldsymbol{X} \arrow[d, "x"] \\ & D \end{tikzcd} ,$$



Les morphismes structuraux ξ_i définissent des morphismes

(3.14) $$(x, \xi_i) : X_x(i) \to x ,$$

dont il est aisé de montrer qu'il font de x une **limite inductive** de X_x. De plus, pour tout $Q \in \mathrm{Hom}((\boldsymbol{C}_{/D})^o, \boldsymbol{V})$, $s_. Q(\boldsymbol{X})$ est la limite projective de $(s_. Q)X^o$ si, et seulement si, pour tout $x \in \mathrm{Hom}(\boldsymbol{X}, D)$, $Q(x)$ est la limite projective de $Q.(X_x)^o$, où X^o designe le foncteur déduit de X par passage aux catégories opposées. D'où le théorème

Théorème 3.2. Soit $\boldsymbol{D}$ une $\mathbb{U}$-catégorie et soit

$$Q : ((\mathrm{Cat})_{/\boldsymbol{D}})^o \to (\mathrm{Ens})$$

un foncteur. Les conditions suivantes sont équivalentes

(i) Q est représentable

(ii) Q commute aux limites projectives

(iii) pour toute catégorie $\boldsymbol{X}$, limite inductive d'un système inductif $X : I^o \to (\mathrm{Cat})$ de l'un des trois types décrits dans 2.6.(iii) et pour tout $x \in \mathrm{Hom}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{D})$, $Q(x)$ est limite projective du foncteur $Q.(X_x)^o$, où X_x est le système inductif de $(\mathrm{Cat})_{/\boldsymbol{D}}$ déduit de X par (3.13).

Corollaire 3.3. Soit $\boldsymbol{V}$ une catégorie telle que, pour tout couple (X,Y) d'objets de $\boldsymbol{V}$, l'ensemble Hom(X,Y) appartienne à $\mathbb{U}$. Soient enfin $\boldsymbol{D}$ une $\mathbb{U}$-catégorie et $Q : (\mathrm{Cat})_{/\boldsymbol{D}} \to \boldsymbol{V}$ un foncteur. Les conditions suivantes sont équivalentes

(i) Q admet un coadjoint,

(ii) Q commute aux limites inductives,

(iii) Q commute aux limites inductives du type décrit dans 3.2.(iii).

En effet, pour que Q admette un coadjoint il faut et il suffit que, pour tout $X \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{V})$, le foncteur

$$h_X.Q^o : ((\mathrm{Cat})_{/D})^o \to (\mathrm{Ens})$$

soit représentable.

4 - Les objets $\Pi_{E/D}(F/E)$ et $\underset{\leftarrow}{Lim}_{E/D}(F/E)$.

Soit $\mathbb{U}$ un univers tel que $\mathbf{Z} \in \mathbb{U}$, fixé dans tout ce numéro.

4 - a). Définition et critère d'existence de $\Pi_{E/D}(F/E)$.

Soit

(4.1) $$d : E \to D$$

une flèche de (Cat) (i.e. un foncteur). Nous cherchons un foncteur coadjoint du foncteur changement de base

(4.2) $$\mathcal{G}d : (Cat)_{/D} \to (Cat)_{/E} \quad , \quad \mathcal{G}d(X) = X \times_D E.$$

S'il existe, nous le noterons

(4.3) $$\Pi_{E/D}(*/E) : (Cat)_{/E} \to (Cat)_{/D} .$$

La donnée d'un foncteur coadjoint comprend aussi celle d'un morphisme de foncteurs

(4.4) $$\pi_{E/D}(*/E) : \mathcal{G}d . \Pi_{E/D}(*/E) \to 1 ,$$

où 1 désigne le foncteur identique de $(Cat)_{/E}$.

Pour construire ce coadjoint, il nous faut trouver, pour tout objet de $(Cat)_{/E}$

(4.5) $$f : F \to E ,$$

un objet de $(Cat)_{/D}$

(4.6) $$\Pi_{E/D}(f) : \Pi_{E/D}(F/E) \to D$$

et un E-foncteur

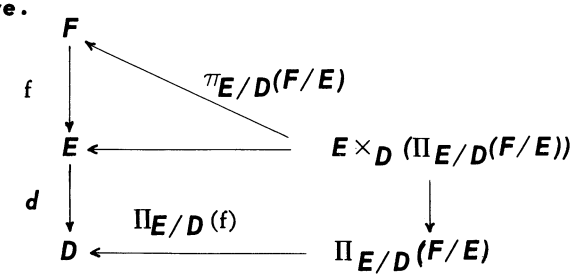
(4.7) $$\pi_{E/D}(F/E) : \mathcal{G}d [\Pi_{E/D}(F/E)] \to F ,$$

de telle sorte que, pour tout objet $x : X \to D$ de $(Cat)_{/D}$, l'application

(4.8) $$\mathrm{Hom}_D(X, \Pi_{E/D}(F/E)) \to \mathrm{Hom}_E(\mathcal{G}d(X), F)$$
$$m \rightsquigarrow \pi_{E/D}(F/E) . \mathcal{G}d(m)$$

soit bijective.

(4.9)



Il revient au même de dire que, pour tout objet de $(\mathrm{Cat})_{/E}$:

$$f : F \to E,$$

le foncteur :

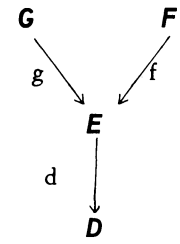
(4.10) $\quad \mathrm{Hom}_E(\mathcal{G}d(*),F) : ((\mathrm{Cat})_{/D})^{o} \to (\mathrm{Ens})$

$$X \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_E(X \times_D E, F)$$

est représentable.

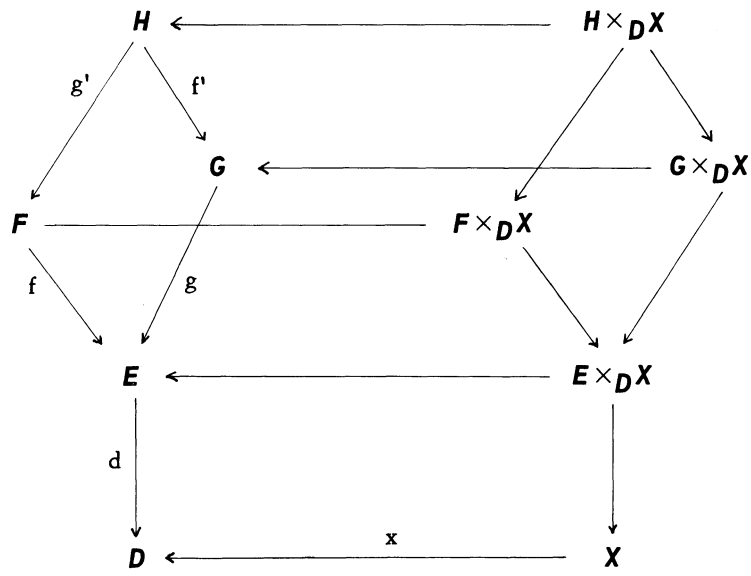
Citons un autre problème qui se ramène à celui-ci. Soit un diagramme de (Cat) :

(4.11)



Soit H un produit fibré de G et de F au dessus de E. Soit $x : X \to D$ un objet de $(\mathrm{Cat})_{/D}$. Considérons le diagramme déduit de (4.11) par le changement de base x :

(4.12)



Le problème que l'on pose est de représenter le foncteur :

(4.13) $$K : ((Cat)_{/D})^{o} \to (Ens)$$
$$(X,x) \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{E\times_D X}(F\times_D X, G\times_D X)$$

Il est clair que ce foncteur est canoniquement isomorphe au foncteur :

(4.14) $$K' : ((Cat)_{/D})^{o} \to (Ens)$$
$$(X,x) \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{F}(F\times_D X, H)$$

Par définition, on notera

(4.15) $$\mathit{Hom}_{E/D}(F,G) \approx \Pi_{F/D}(F\times_E G/F)$$

la D-catégorie qui représente K, **si elle existe.**

Lorsque D est une **catégorie finale,** ce qui signifie que Card (Fl(D)) = 1, on écrit

$$\mathit{Hom}_{E/.}(F,G)$$

au lieu de $\mathit{Hom}_{E/D}(F,G)$, ce qui est licite, car on vérifie que la catégorie ainsi désignée dans S.G.A.VI.2. représente le foncteur K.

Proposition 4.1. Soit d : $E \to D$ un morphisme dans (Cat). Pour que le foncteur coadjoint du foncteur changement de base :

$$\mathcal{C}d : (Cat)_{/D} \to (Cat)_{/E}$$

existe, il faut et il suffit que $\mathcal{C}d$ commute aux limites inductives.

Trivial en appliquant 3.3. On va trouver un énoncé plus agréable grâce à 3.3.(iii). Remarquons d'abord que le changement de base commute aux sommes directes, car celles-ci se calculent en prenant la somme directe des ensembles d'objets et de flèches pour ensembles d'objets et de flèches de la somme directe. Or, dans (Ens), le changement de base commute aux sommes directes. On remarque aussi que, si

$$f : Y \to X$$

est un foncteur **surjectif sur les couples de flèches composables,** pour tout z : $Z \to X$, le foncteur déduit de f par le changement de base z :

$$f' : Y\times_X Z \to Z$$

est également **surjectif sur les couples de flèches composables,** donc est un épimorphisme effectif universel, cf. 2.5.. Il en résulte que, par tout changement de base, le conoyau

$$Y\times_X Y \rightrightarrows Y \to X$$

est transformé en un conoyau.

Il restera à trouver une condition pour que le changement de base commute aux sommes amalgamées du type -a- de l'énumération de 2.6.(iii)

D'où le lemme :

Lemme 4.2. Soit $d : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{D}$ une flèche de (Cat). Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Le foncteur changement de base :

$$\mathfrak{G}d : (\mathrm{Cat})/\boldsymbol{D} \to (\mathrm{Cat})/\boldsymbol{E}$$

admet un foncteur coadjoint ;

(ii) pour $n = 2$ et pour $n = 3$, et pour tout

$$f : \Delta_n \to \boldsymbol{D},$$

si l'on désigne par

$$d^f : \boldsymbol{E}\mathrm{x}_{\boldsymbol{D}} \Delta_n \to \Delta_n$$

la projection du produit fibré $\boldsymbol{E}\mathrm{x}_{\boldsymbol{D}} \Delta_n$ sur son second facteur, **le diagramme déduit de** (2.18) **par le changement de base** d^f **est une somme amalgamée dans** (Cat).

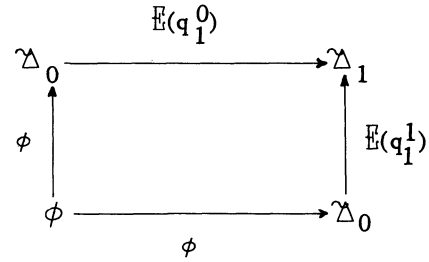
En effet, les limites inductives existent dans (Cat), et en particulier les sommes amalgamées, il en résulte que le diagramme de 4.2. (ii) est une somme amalgamée dans (Cat) si et seulement si le diagramme de $(\mathrm{Cat})/\boldsymbol{E}$ qui s'en déduit grâce à la projection de $\boldsymbol{E}\mathrm{x}_{\boldsymbol{D}} \Delta_n$ sur $\boldsymbol{E}$, (cf. (3.13)) est une somme amalgamée.

En fait nous n'utiliserons pas l'existence des limites inductives dans (Cat), car les sommes amalgamées dont l'existence est nécessaire à la démonstration seront construites dans 4.6..

Montrons d'abord un changement de base qui ne commute pas aux sommes amalgamées :

(4.16) $\qquad \mathbb{E}(p_2^1) : \Delta_1 \to \Delta_2$. (cf. (2.16) et (2.7)).

Le transformé de (2.18), pour $n = 2$, par le changement de base (4.16) n'est pas une somme amalgamée. De fait, on trouve le diagramme :



où $\phi : \phi \to \Delta_0$ désigne l'unique foncteur ayant pour source la catégorie vide et pour but la catégorie Δ_0.

Cet exemple nous suggère d'introduire la condition (CB) ci dessous.

Soit $d : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{D}$ un foncteur. Soit $h' \in Fl(\boldsymbol{E})$ et soit $(f,g) \in Fl(\boldsymbol{D}) \times Fl(\boldsymbol{D})$, tel que :

$$\text{(4.17)} \qquad \begin{cases} \text{source}(f) = \text{but}(g). \\ d(h') = fg. \end{cases}$$

Soit $K(h',f,g)$ l'ensemble :

$$\text{(4.18)} \qquad \{(f',g') \in Fl(\boldsymbol{E}) \times Fl(\boldsymbol{E}) \mid h' = f'g', d(f') = f, d(g') = g\}.$$

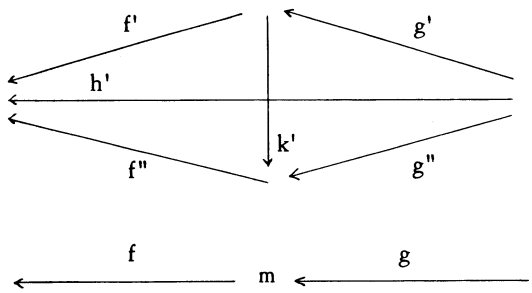
Soit S la relation dans $K(h',f,g)$:

$$\text{(4.19)} \qquad (f',g')S(f'',g'') \iff \left[\begin{array}{r} \text{il existe } k' \in Fl(\boldsymbol{E}), d(k') = id_m, \\ f = f''k' \\ g'' = k'g' \end{array}\right]$$

où m désigne la source de f.

Dessinons les diagrammes en cause :

(4.20)



Soit enfin R la relation d'équivalence engendrée dans $K(h',f,g)$ par la relation S.

On peut maintenant énoncer la condition :

(CB) **pour tout** $h' \in Fl(\boldsymbol{E})$ **et tout** $(f,g) \in Fl(\boldsymbol{D}) \times Fl(\boldsymbol{D})$ **tels que l'on ait** (4.17), $K'h',f,g)$ **on a :**

$$\text{Card}\,(K(h',f,g)/R) = 1.$$

Lemme 4.3. Un foncteur fibrant ou cofibrant vérifie la condition (CB). La condition (CB) est stable par changement de base.

La démonstration est laissée au lecteur qui pourra ainsi se familiariser avec la condition (CB).

Théorème 4.4. Soit un foncteur

$$d : E \to D.$$

Pour que $\Pi_{E/D}(F/E)$ existe pour toute E-catégorie F, il est nécessaire et suffisant que d **vérifie la condition** (CB).

Corollaire 4.5. Soit, de plus, un foncteur :

$$f : F \to E,$$

pour que $Hom_{E/D}(F,G)$ existe pour toute E-catégorie G, il suffit que le foncteur composé df vérifie la condition (CB).

On remarquera d'abord que, par définition, **la formation de $\Pi_{E/D}(F/E)$ commute au changement de base.** Ce fait, joint à 4.3., prouve que les deux conditions de 4.4. sont, à priori, stables par changement de base; ce qui donne confiance.

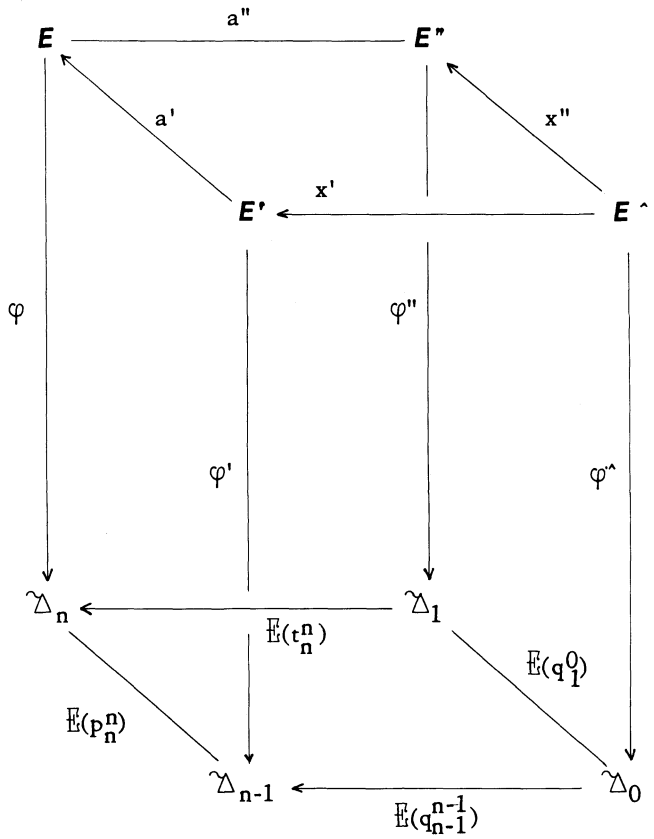
Il résulte de (4.15) que le corollaire est conséquence triviale du théorème.

Il nous faut donc prouver que (CB) équivaut à 4.2.(ii). **La démonstration prendra fin avec le paragraphe** (4-a)- .

Nous allons d'abord donner une construction des sommes amalgamées qui interviennent dans 4.2.(ii).

Construction 4.6. Soit un diagramme de (Cat)

(4.21)



dans lequel **les faces verticales sont des produits fibrés.** On sait que la face inférieure est une somme amalgamée. Nous allons construire la somme amalgamée S de E' et E'' au dessus de $E\hat{}$.

On pose

(4.22) $$0 = Ob(\boldsymbol{S}) = Ob(\boldsymbol{E}') \underset{Ob(\boldsymbol{E}\hat{})}{\amalg} Ob(\boldsymbol{E}'')$$

(4.23) $$F = Fl(\boldsymbol{E}') \underset{Fl(\boldsymbol{E}\hat{})}{\amalg} Fl(\boldsymbol{E}'') \quad .$$

D'où des applications source et but

(4.24) $$s,b : F \rightrightarrows 0 \quad ,$$

qui sont les limites des applications source et but de $\boldsymbol{E}'$ et de $\boldsymbol{E}''$. Soit $(f,g) \in FxF$, un couple de "flèches" "composables", i.e. :

$$s(f) = b(g)$$

Il est clair que f et g appartiennent tous deux à l'image de $Fl(\boldsymbol{E}')$ ou de $Fl(\boldsymbol{E}'')$, sauf, peut-être, si $m = s(f)$ appartient à l'image de $Ob(\boldsymbol{E}\hat{})$. Dans ce cas, nécessairement, f appartient à l'image de $Fl(\boldsymbol{E}')$ et g à celle de $Fl(\boldsymbol{E}'')$. C'est le seul cas où deux flèches composables de $\boldsymbol{F}$ "n'ont pas de composé", car, dans les autres cas, on définit la loi de F à partir de celles de $\boldsymbol{E}'$ ou de $\boldsymbol{E}''$. Rajoutons donc les composés qui manquent, ce qui peut se faire plus simplement ici que dans le cas des limites inductives générales.

Soit K l'ensemble :

(4.25) $$K = \{(f',f'') \in Fl(\boldsymbol{E}') x Fl(\boldsymbol{E}'') \mid f' \notin Im(Fl(\boldsymbol{E}\hat{})),$$
$$f'' \notin Im(Fl(\boldsymbol{E}\hat{})), \text{ il existe } m \in Ob(\boldsymbol{E}\hat{}), s(f') = x'(m),$$
$$b(f'') = x''(m) \} .$$

Soit S la relation dans K :

(4.26) $$(f',f'')S(g',g'') \iff \left(\text{il existe } h \in Fl(\boldsymbol{E}\hat{}),\ f' = g'x'(h),\ g'' = x''(h)f'' \right) .$$

Soit R la relation d'équivalence engendrée par S dans K et soit $F' = K/R$. Si $(f',f'') \in K$, on désignera par $(f',f'')\hat{}$ sa classe dans F'.

Posons $\mathbb{F} = F \amalg F'$. Il est clair que si deux éléments (f',f'') et (g',g'') de K sont équivalents, on a

source (f'') = source (g''), but (f') = but(g') on pose alors :

(4.27) $$s((f',f'')\hat{}) = \text{source } (f'')$$
$$b((f',f'')\hat{}) = \text{but } (f'),$$

ce qui permet de prolonger les applications s et b de (4.24) en deux applications :

$$s, b : \mathbb{F} \rightrightarrows 0 ;$$

D'où une notion de couples de flèches composables. On remarque alors qu'une flèche de F' ne peut être composable, à droite ou à gauche, qu'avec une flèche de F.

Si l'on a $(f',f'')\in K, g\in F$, $s((f',f'')\hat{}) = b(g)$ on a nécessairement $g\in \mathrm{Im}(Fl(\boldsymbol{E}''))$, et on pose :

$$(f',f'')\hat{}\,g = (f',f''\,g)\hat{},$$

composé qui ne dépend pas du choix du représentant (f',f'') de $(f',f'')\hat{}$, comme il est facile de s'en assurer.

Si l'on a $(f',f'')\in K$, $g\in F$, $b((f',f'')\hat{}) = s(g)$, on a nécessairement $g\in \mathrm{Im}(Fl(\boldsymbol{E}'))$, et l'on pose :

$$g(f',f'')\hat{} = (gf',f'')\hat{}.$$

On vérifie facilement que l'on a ainsi défini une catégorie $\boldsymbol{S}$ dont l'ensemble d'objets est 0 et l'ensemble de flèches est $\mathbb{F}$.

Il est clair que $\mathbb{F}$ est engendré par les images de $Fl(\boldsymbol{E}')$ et de $Fl(\boldsymbol{E}'')$, autrement dit par F. On définit des foncteurs

$$s' : \boldsymbol{E}' \to \boldsymbol{S}$$
$$s'' : \boldsymbol{E}'' \to \boldsymbol{S}$$

par leur action sur les ensembles de flèches : ce sont les applications structurales de $Fl(\boldsymbol{E}')$ et $Fl(\boldsymbol{E}'')$ dans leur somme amalgamée au dessus de $Fl(\boldsymbol{E}\hat{})$ (c'est F), composées avec l'injection de F dans $\mathbb{F}$.

Il est aisé de vérifier que $\boldsymbol{S}$ est bien la somme amalgamée cherchée. Il existe donc un foncteur :

$$s : \boldsymbol{S} \to \Delta_n$$

tel que l'on ait :

$$ss'' = \mathbb{E}(t_n).\,\varphi'' \qquad ss' = \mathbb{E}(p_n^n).\,\varphi'$$

et un foncteur

$$i : \boldsymbol{S} \to \boldsymbol{E}$$

tel que l'on ait :

$$is = a' \qquad is'' = a'',$$

on a alors

$$\varphi i = s.$$

Prouvons maintenant 4.4., i.e.(CB) équivaut à 4.2. (ii).

Supposons que f **vérifie** (CB); puisque cette condition est stable

par changement de base, il en est de même de

$$d^f : \boldsymbol{E} \times_{\boldsymbol{D}} \Delta_n \to \Delta_n,$$

ce qui permet de supposer que $\boldsymbol{D} = \Delta_n$.

Prouvons d'abord que i est surjectif sur les flèches. Il est clair que si $x \in Fl(\boldsymbol{E})$ et si x n'appartient ni à l'image de $Fl(\boldsymbol{E}')$ ni à celle de $Fl(\boldsymbol{E}'')$, on a

$$\varphi(x) = (p,n),\ 0 \leqslant p \leqslant n-2.\ (\text{cf.}(2.3)).$$

Il résulte alors de (CB) que $x = x'x''$, où

$$\varphi(x') = (p,n-1) \quad \varphi(x'') = (n-1,n).$$

x' et x" appartenant respectivement à l'image de $Fl(\boldsymbol{E}')$ et de $Fl(\boldsymbol{E}'')$. Si l'on pose

$$m = \text{source}(x') = \text{but}(x''),$$

il est clair que $m \in Im(Ob(\boldsymbol{E}\hat{}))$. Il en résulte qu'il existe $z \in F'$ tel que $i(z) = x$, par définition même de F'.

Pour prouver que i est injectif sur les flèches, il reste à voir qu'un tel z est unique. Soit $z' \in F'$ tel que $i(z') = i(z) = x$. Soient (u',u") et (v',v") des représentants de z et de z' dans K. On a, par définition :

$$i(z) = a'(u')a''(u'') = a'(v')a''(v'').$$

Il est clair que, puisque u" et v" appartiennent à $Fl(\boldsymbol{E}'')$, ils se projettent tous deux sur (n-1,n) et que par suite u' et v' ont tous deux même projection. Il résulte alors de (CB) qu'il existe $k' \in Fl(\boldsymbol{E})$ tel que

$$\varphi(k') = (n-1,n-1)$$
$$a'(v')k' = a'(u')$$
$$k'a''(u'') = a''(v'').$$

Or $k' \in Im(Fl(\boldsymbol{E}\hat{}))$, d'où il résulte que (u',u") et (v',v") sont équivalents. **Donc i est un isomorphisme si** d **vérifie la condition** (CB).

Il reste à prouver que la condition (CB) est nécessaire. Pour cela on considère deux flèches composables f et g de $\boldsymbol{D}$, d'où un foncteur bien déterminé :

$$p : \Delta_2 \to \boldsymbol{D}$$

tel que

$$p((0,1)) = f \quad \text{et} \quad p((1,2) = g.\ (\text{cf.}(2.14)).$$

Pour que la condition (CB) soit vérifiée pour tous les $h' \in Fl(\boldsymbol{E})$ tels que $d(h') = fg$, il est nécessaire et suffisant que, par le changement

de base

$$d^P : E \times_D \Delta_2 \to \Delta_2,$$

où d^P est la projection du produit fibré sur son second facteur, le diagramme (2.18) pour n = 2 soit transformé en une somme amalgamée. C'est du moins ce que l'on prouve en analysant la construction de S.

C.Q.F.D.

Remarquons que, dans 4.2.(ii), on peut remplacer la condition "pour n = 2 et pour n = 3" par "pour n = 2".

4 - b). Construction.

Nous inspirant des numéros 2 et 3, il nous reste à donner **une construction de** $\Pi_{E/D}(F/E)$ et de $Hom_{E/D}(F,G)$.

Soient donc $F \xrightarrow{f} E \xrightarrow{d} D$ deux flèches composables de (Cat).. Supposons que d vérifie (CB) et posons

(4.28) $\quad X = \Pi_{E/D}(F/E)$, $x = \Pi_{E/D}(f)$, $x : X \to D$,

cf. (4.6).

Décrivons les objets de X. Soit $a \in Ob(D)$. On sait que a s'identifie à un foncteur, encore noté a

$$a : \Delta_0 \to D \ , \quad a(0) = a.$$

L'ensemble des objets de X qui se projettent sur a s'identifie donc à l'ensemble

$$Hom_{E(}E \times_D \Delta_0 , F) \approx \Gamma(F_a / E_a),$$

où F_a et E_a désignent les catégories fibres de F et E en a.

A toute flèche m de D, il correspond un foncteur

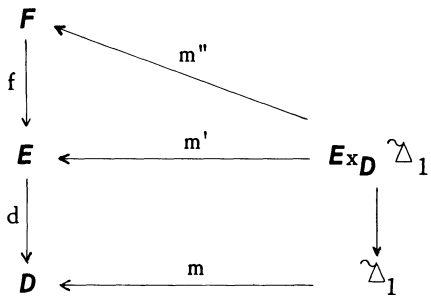
$$m : \Delta_1 \to D \quad , \quad m((0,1)) = m.$$

L'ensemble des flèches de X **de projection** m **s'identifie à l'ensemble**

$$Hom_E(E \times_D \Delta_1, F) \approx \Gamma(F \times_D \Delta_1 \ / \ E \times_D \Delta_1).$$

Soit donc une flèche de X se projettant sur m. Il lui correspond un diagramme commutatif

(4.29)

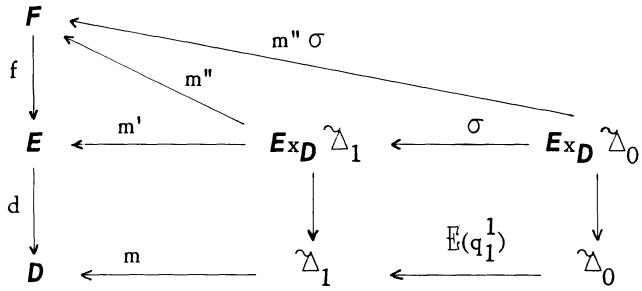


La source (Resp. **le but**) de cette flèche s'obtient en composant m" avec le morphisme σ (Resp. β) déduit, par le changement de base d, du morphisme

$$\mathbb{E}(q_1^1) : \Delta_0 \to \Delta_1$$

(Resp. $$\mathbb{E}(q_1^0) : \Delta_0 \to \Delta_1$$

(4.30)



On définirait de même l'application qui, à tout objet de X associe son application identique, en faisant intervenir l'application $\mathbb{E}(d_0^0)$ (cf.(2.16) etc...)

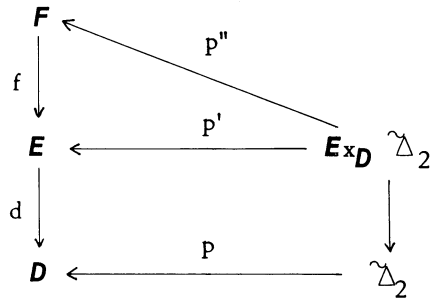
Désignons par s et b les applications source et but de X. Soit (m',n') **un couple de flèches composables de** X, i.e. s(m') = b(n'). Soit (m,n) l'image de (m',n') par x : $X \to D$. Il existe un foncteur :

$$\hat{p} : \Delta_2 \to X,$$

tel que :

$$\hat{p}((0,1)) = m' \quad \text{et} \quad \hat{p}((1,2)) = n', \text{ c'est-à-dire,}$$

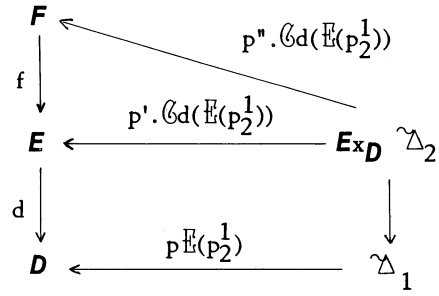
par définition du foncteur représenté par X, un diagramme :



où l'on a posé : $p = x\hat{p}$.

Le composé de m' et de n' s'obtient en composant p" avec le morphisme déduit par le changement de base d du morphisme

$$\mathbb{E}(p_2^1) : \Delta_1 \to \Delta_2 :$$



Ayant supposé que d vérifie (CB), il est inutile de vérifier que l'on a défini une catégorie.

On sait (SGA.VI,p.14) que $\underline{\Gamma}(F/E)$ représente le foncteur :

(4.31) $$\Phi : (\mathrm{Cat})^o \to (\mathrm{Ens})$$
$$V \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_E(E \times V, F),$$

c'est à dire que $\underline{\Gamma}(F/E) \simeq \Pi_{E/e}(F/E)$, où e est une catégorie finale, et que $\underline{\Gamma}(\Pi_{E/D}(F/E)/D)$ représente le foncteur :

(4.32) $$\Psi : (\mathrm{Cat})^o \to (\mathrm{Ens})$$
$$V \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_E(E \times_D D \times V, F)$$

lequel est canoniquement isomorphe à Φ. D'où un isomorphisme canonique:

$$\alpha : \underline{\Gamma}(\Pi_{E/D}(F/E)/D) \to \underline{\Gamma}(F/E). \tag{4.33}$$

4-- c) - Associativité des $\underleftarrow{Lim}$.

Sous les hypothèses du paragraphe 4.b), **supposons que le foncteur f vérifie** Fib II, ce qui signifie que le composé de deux morphismes E-cartésiens de F est un morphisme E-cartésien. Soit

$$i : F^c \to F,$$

la sous-catégorie de F dont les flèches sont les flèches E-cartésiennes de F; (elle a donc mêmes objets que F). Posons :

$$f^c = fi.$$

De i, on déduit un monomorphisme de catégories :

$$\Pi(i) : \Pi_{E/D}(F^c/E) \to \Pi_{E/D}(F/E), \tag{4.34}$$

d'où un diagramme commutatif, dans lequel les flèches horizontales sont des isomorphismes et les flèches verticales des monomorphismes:

$$\begin{array}{ccc} \underline{\Gamma}(\Pi_{E/D}(F/E)/D) & \xrightarrow{\approx\ \alpha} & \underline{\Gamma}(F/E), \\ j \uparrow & & \uparrow j' \\ \underline{\Gamma}(\Pi_{E/D}(F^c/E)/D) & \xrightarrow{\approx\ \alpha^c} & \underline{\Gamma}(F^c/E) \end{array} \tag{4.34bis}$$

.

On sait que j' identifie $\underline{\Gamma}(F^c/E)$ à une sous-catégorie de $\underline{\Gamma}(F/E)$ dont les objets sont les sections cartésiennes de F sur E.

La sous-catégorie pleine de $\underline{\Gamma}(F/E)$ engendrée par l'image de $\underline{\Gamma}(F^c/E)$ est donc $\underleftarrow{Lim}(F/E)$.

Supposons toujours que f vérifie Fib II **et désignons par:**

$$\underleftarrow{Lim}_{E/D}(F/E) \tag{4.35}$$

la sous-catégorie pleine de $\Pi_{E/D}(F/E)$ **engendrée par l'image de** $\Pi_{E/D}(F^c/E)$ **par** $\Pi(i)$(cf. (4.34)). C'est une D-catégorie, et si $\delta \in Ob(D)$, la fibre de $\underleftarrow{Lim}_{E/D}(F/D)$ au dessus de d s'identifie à la catégorie $\underleftarrow{Lim}(F^\delta/E^\delta)$, où E^δ est la fibre de E au dessus de δ et où $F = F \times_E E^\delta$.

$$\begin{array}{ccccc} F & \longleftarrow & F^\delta & & \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow & & \\ E & \longleftarrow & E^\delta & & \\ {\scriptstyle d}\downarrow & & \downarrow & & \\ D & \longleftarrow & \Delta_o & & \delta'(o) = \delta \\ & {\scriptstyle \delta'} & & & \end{array}$$

Ceci dit, il est clair que $\underset{\leftarrow}{Lim}((\underset{\leftarrow}{Lim}_{E/D}(F/E))/D)$ qui est une sous-catégorie pleine de $\underline{\Gamma}((\underset{\leftarrow}{Lim}_{E/D}(F/E)/D)$ laquelle s'identifie à une sous-catégorie pleine de $\underline{\Gamma}((\Pi_{E/D}(F/E)/D)$, sera identifiée par le foncteur α à une sous-catégorie pleine de $\underline{\Gamma}(F/E)$. Pour que cette catégorie soit précisément égale à $\underset{\leftarrow}{Lim}(F/E)$, il faut et il suffit que l'on ait, modulo ces identifications :

$$\text{Ob}(\underset{\leftarrow}{Lim}(\underset{\leftarrow}{Lim}_{E/D}(F/E)/D)) = \text{Ob}(\underline{\Gamma}(\Pi_{E/D}(F^{c}/E)/D)). \tag{4.36}$$

Théorème 4.7. (Associativité des $\underset{\leftarrow}{Lim}$) Soient

$$F \xrightarrow{f} E \xrightarrow{d} \overset{\leftarrow}{D}$$

deux foncteurs, tels que f soit **fibrant** et d **cofibrant.** La catégorie $\underset{\leftarrow}{Lim}(\underset{\leftarrow}{Lim}_{E/D}(F/E)/D)$, (cf. (4.35)), s'identifie à une sous-catégorie pleine de $\underline{\Gamma}(\Pi_{E/D}(F/E)/D)$ et se trouve identifiée par l'isomorphisme :

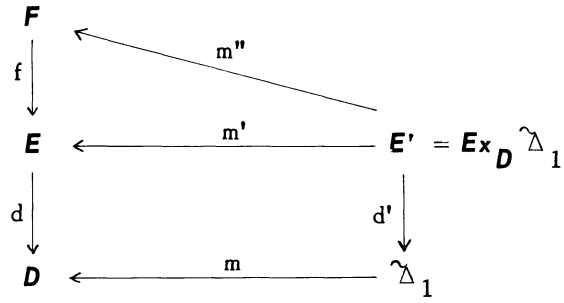
$$\alpha : \underline{\Gamma}(\Pi_{E/D}(F/E)/D) \to \underline{\Gamma}(F/E) \quad \text{(cf. (4.33))} \tag{4.37}$$

à la catégorie $\underset{\leftarrow}{Lim}(F/E)$.

Nous allons énoncer sous forme de lemmes et dans l'ordre de la démonstration un certain nombre de résultats intermédiaires. **Dans ces énoncés nous conservons les hypothèses de** 4.7.

Lemme 4.8. Soit $\mu \in \text{Fl}(\Pi_{E/D}(F/E))$, correspondant au diagramme

(4.38)



La condition

(4.39) (quel que soit $\varphi \in \text{Fl}(E')$ tel que φ soit $\tilde{\Delta}_1$ -cocartésien, $m''(\varphi)$ est E-cartésien)

entraîne que μ est D-cartésien.

Lemme 4.9. Soit $\mu \in \mathrm{Fl}(\Pi_{E/D}(F/E))$, correspondant au diagramme (4.38), et supposons que le but de μ appartienne à l'image par $\Pi(i)$ de $\mathrm{Ob}(\Pi_{E/D}(F^c/E))$ (cf. (4.34)). Supposons de plus que μ vérifie (4.39), alors

(i) la source de μ appartient également à l'image par $\Pi(i)$ de $\mathrm{Ob}(\Pi_{E/D}(F^c/E))$,

(ii) μ est une flèche D-cartésienne de $\underset{\leftarrow}{Lim}_{E/D}(F/E)$

(iii) pour tout $\varphi \in \mathrm{Fl}(E')$, $m''(\varphi)$ est E-cartésien, i.e. μ appartient à l'image par $\Pi(i)$ de $\mathrm{Fl}(\Pi_{E/D}(F^c/E))$.

Lemme 4.10. Soit K une partie $\mathrm{Fl}(F)$ définissant un **clivage** de f et soit H une partie de $\mathrm{Fl}(E)$ définissant un **coclivage** de d. La partie P de $\mathrm{Fl}(\Pi_{E/D}(F/E))$ définie par (4.40) définit un clivage de $\Pi_{E/D}(f)$; et le foncteur :

$$\Pi_{E/D}(f) : \Pi_{E/D}(F/E) \to D$$

est **fibrant.**

(4.40) Pour qu'une flèche μ de $\Pi_{E/D}(F/E)$, correspondant au diagramme (4.38), appartienne à P, il est nécessaire et suffisant que, pour tout $x \in \mathrm{Fl}(E')$ tel que $d'(x) = (0,1)$ et $m'(x) \in H$, on ait $m''(x) \in K$.

Lemme 4.11. Si l'on conserve les hypothèses de 4.10. et si l'on pose

(4.41) $$P' = P \cap \mathrm{Fl}(\underset{\leftarrow}{Lim}_{E/D}(F/E)),$$

P' définit un clivage de $\underset{\leftarrow}{Lim}_{E/D}(F/E)$ sur D; et le foncteur :

(4.42) $$\underset{\leftarrow}{Lim}_{E/D}(f) : \underset{\leftarrow}{Lim}_{E/D}(F/E) \to D,$$

restriction à $\underset{\leftarrow}{Lim}_{E/D}(F/E)$ du foncteur $\Pi_{E/D}(f)$, **est fibrant.**

Lemme 4.12. Pour qu'une flèche $\mu \in \mathrm{Fl}(\Pi_{E/D}(F/E))$, (resp. $\mu \in \mathrm{Fl}((\underset{\leftarrow}{Lim}_{E/D}(F/E))$) soit D-cartésienne, il faut et il suffit que (4.39) soit vérifiée.

La démonstration de ces lemmes occupe le reste du paragraphe 4-c).

Preuve de 4.8. Précisons d'abord quelques notations :

Posons :

(4.43 $$p = m.\mathbb{E}(d_1^1) : \overset{\frown}{\Delta}_2 \to D,$$ (cf. (2.15)),

et soit

(4.44)
$$\begin{array}{ccccc} E & \xleftarrow{m'} & E' & \xleftarrow{h} & E'' = E \times_D \Delta_2 \\ \downarrow{\scriptstyle d} & & \downarrow{\scriptstyle d'} & & \downarrow{\scriptstyle d''} \\ D & \xleftarrow{m} & \Delta_1 & \xleftarrow[\mathbb{E}(d_1^1)]{} & \Delta_2 \end{array}$$

un diagramme dans lequel tout les carrés sont des produits fibrés. Posons

(4.45) $$p' = m'h.$$

Si l'on se souvient que l'on a désigné par $\mathcal{G}d$ le foncteur changement de base de $(Cat)_{/D}$ dans $(Cat)_{/E}$, (cf. (4.2)), on a donc :

$$m' = \mathcal{G}d(m), \quad h = \mathcal{G}d(\mathbb{E}(d_1^1)),$$

Pour que μ soit cartésien, il faut et il suffit que,

pour tout

(4.46) $$n'' : E' \to F,$$

tel que :

(4.47) $$fn'' = m' \quad \text{et} \quad n'.\mathcal{G}d(\mathbb{E}(q_1^0)) = m''.\mathcal{G}d(\mathbb{E}(q_1^0)),$$

il existe un foncteur unique :

(4.48) $$p'' : E'' \to F,$$

tel que :

(4.49) $$fp'' = p', \quad n'' = p''.\mathcal{G}d(\mathbb{E}(p_2^1)) \quad \text{et}$$
$$m'' = p''.\mathcal{G}d(\mathbb{E}(p_2^2)).$$

Ceci n'est qu'une traduction de la définition d'un morphisme cartésien, utilisant la forme explicite du foncteur que représente $\Pi_{E/D}(F/E)$.

Soit donc un tel n", **construisons** p". Soit $x \in Ob(E'')$.

Si $d''(x) = 2$, il existe un $x' \in Ob(E')$, unique, tel que

$$\mathcal{G}d(\mathbb{E}(p_2^1))(x') = x,$$

d'ailleurs $x' = h(x)$. On aura nécessairement, en vertu de (4.49),

$$p''(x) = n''(x').$$

Si $d''(x) = 1$, il existe $x' \in Ob(E')$, unique, tel que

$$\mathcal{G}d(\mathbb{E}(p_2^2))(x') = x,$$

d'ailleurs $x' = h(x)$. On aura nécessairement, en vertu de (4.49),

$$p''(x) = m''(x').$$

Enfin, si $d''(x) = 0$, on a, en vertu de (4.47):

$$\mathcal{G}d(\mathbb{E}(p_2^2))\,(h(x)) = \mathcal{G}d(\mathbb{E}(p_2^1))\,(h(x)) = x,$$

et $h(x)$ est le seul objet de $\boldsymbol{E'}$ possédant cette propriété, on aura donc

$$p''(x) = n''(h(x)) = m''(h(x)).$$

Il est facile de vérifier que p'' vérifie (4.49), du moins en ce qui concerne les objets.

Soit $x \in Fl(\boldsymbol{E}'')$, on applique le même procédé, du moins si $d''(x) \neq (1,2)$.

Si $d''(x) = (0,2)$ ou $= (2,2)$, on a

$$\mathcal{G}d(\mathbb{E}(p_2^1))\,(h(x)) = x,$$

il faut donc que

$$p''(x) = n''(h(x)).$$

Si $d''(x) = (0,1)$ ou $= (1,1)$, on a

$$\mathcal{G}d(\mathbb{E}(p_2^2))\,(h(x)) = x,$$

il faut donc que

$$p''(x) = m''(h(x)).$$

Si $d''(x) = (0,0)$, on a

$$\mathcal{G}d(\mathbb{E}(p_2^2))\,(h(x)) = \mathcal{G}d(\mathbb{E}(p_2^1))\,(h(x)) = x$$

et aussi

$$n''(h(x)) = m''(h(x)),$$

il faut donc que

$$p''(x) = m''(h(x)).$$

Enfin si $d''(x) = (1,2)$, puisque d est cofibrant il en est de même de d'' et par suite il existe $y \in Fl(\boldsymbol{E}'')$ tel que

$$d''(y) = (0,1) \qquad \text{et}$$

$$s(y) = b(x) \quad \text{(i.e. le composé } yx \text{ existe)}$$

et tel que y soit $\tilde{\Delta}_2$ co-cartésien. Or, par construction, on a

$$p''(y) = m''(h(y)),$$

or $m''(h(y))$ est cartésien car $h(y)$ est cocartésien (4.39), il en résulte que $p''(y)$ est hypercartésien, car f est **fibrant**, d'où il résulte qu'il existe un morphisme unique, $p''(x) \in Fl(\boldsymbol{F})$, tel que

$$p''(y)p''(x) = p''(yx)\ .$$

Remarquons que, si $y' \in Fl(\boldsymbol{E}'')$ est cocartésienne, si $d''(y') = (0,1)$ et si $s(y') = b(x)$, il existe une flèche inversible de $\boldsymbol{E}''$, soit u, telle que

$$uy' = y.$$

Il en résulte facilement que si l'on définit $p''(x)$ **à l'aide de** y' **on trouve le même résultat qu'avec** y.

Il reste à voir que p" est bien un foncteur, car alors la condition (4.49) sera vérifiée.

La compatibilité de p" avec les applications source et but est évidente.

Soient x et y deux flèches composables de $\boldsymbol{E}''$, posons

$$z = xy. \tag{4.50}$$

Par construction, si x et y se projettent toutes deux sur la sous-catégorie pleine de $\mathbb{\Delta}_2$ dont les objets sont 0 et 2 (Resp. sont 0 et 1), on a

$$p''(xy) = n''(h(xy)) = n''h(x)\ n''h(y) = p''(x)p''(y)$$

(Resp. $p''(xy) = m''h(xy) = m''h(x)m''h(y) = p''(x)p''(y)$).

Il reste à étudier le cas où l'une des deux flèches se projette sur $(0,1)$.

Supposons que $d''(y) = (1,2)$ et $d''(x) = (0,1)$. Soit $x' \in Fl(\boldsymbol{E}'')$ telle que x' soit cocartésienne, composable avec y et de projection $(0,1)$. Il existe un $u \in Fl(\boldsymbol{E}'')$, uniquement déterminé par :

$$ux' = x, \qquad d''(u) = (0,0), \tag{4.51}$$

en effet, x' est cocartésien.

On a vu que

$$p''(x')p''(y) = p''(x'y)$$

car x' est cocartésien. Par ailleurs, x' et u se projettent tous deux sur la sous-catégorie image du foncteur :

$$\mathbb{E}(p_2^2) : \mathbb{\Delta}_1 \to \mathbb{\Delta}_2,$$

on a donc $p''(x') = m''h(x')$ et $p''(u) = m''h(u)$, d'où :

$$p''(u)p''(x') = p''(x),$$

d'où il résulte que

$$\begin{aligned} p''(u)p''(x')p''(y) &= p''(x)p''(y) \\ &= p''(u)p''(x'y) . \end{aligned}$$

Enfin, u et x'y se projettent tous deux sur la catégorie image du foncteur

$$\mathbb{E}(p_2^1) : \mathbb{\Delta}_1 \to \mathbb{\Delta}_2,$$

donc $$p''(u)p''(x'y) = p''(ux'y) = p''(xy).$$

Supposons maintenant que $d''(y) = (1,2)$ et $d''(x) = (1,1)$.

Soit $x' \in Fl(\boldsymbol{E}'')$, cocartésien, composable avec x et tel que $d''(x') = (0,1)$. On aura, par construction :

$$p''(x')p''(xy) = p''(x'xy),$$

car $d''(xy) = (1,2)$. Par ailleurs $d''(x')$ et $d''(x)$ appartiennent tous deux à l'image de $\mathbb{E}(p_2^2)$, on a donc :

$$p''(x')p''(x) = p''(x'x).$$

Enfin $d''(x'x) = (0,1)$, et l'on vient de prouver que :

$$p''(x'x)p''(y) = p''(x'xy).$$

On a donc

$$p''(x')p''(x)p''(y) = p''(x')p''(xy),$$

or $p''(x')$ est hypercartésien, donc :

$$p''(x)p''(y) = p''(xy).$$

Il reste à examiner le cas où $d''(x) = (1,2)$. On a alors $d''(y) = (2.2)$. On choisit encore $x' \in Fl(\boldsymbol{E}'')$, cocartésien, composable avec x et tel que $d''(x') = (0,1)$. D'où la conclusion.

On a donc prouvé 4.8.

Preuve de 4.9.

Prouvons (i). Par hypothèse, le but de μ appartient à l'image par $\Pi(i)$ de $Ob(\Pi_{\boldsymbol{E}/\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{F}^C/\boldsymbol{E}))$, ce qui signifie que, pour tout $x \in Fl(\boldsymbol{E}')$ tel que $d'(x) = (0,0)$, $m''(x)$ est cartésien, et même hypercartésien car f est fibrant.

Il faut prouver que, pour tout $x \in Fl(\boldsymbol{E}')$ tel que $d'(x) = (1,1)$, $m''(x)$ est cartésien. Soient a et b deux flèches cocartésiennes de $\boldsymbol{E}'$ telles que

$$d'(a) = d'(b) = (0,1)$$

et

$$s(a) = b(x) \quad s(b) = s(x). \text{ (Source et but).}$$

Il existe $x' \in Fl(\boldsymbol{E}')$ tel que

$$d'(x') = (0,0) \quad \text{et} \quad x'b = ax,$$

en effet, b est cocartésien.

Par hypothèse, μ vérifie (4.39), il en résulte que $m''(a)$ et $m''(b)$ sont hypercartésiens, de même $m''(x')$, comme nous l'avons dit, donc aussi $m''(x)$. D'où (i).

Prouvons (ii). Par définition, $\boldsymbol{Lim}_{\boldsymbol{E}/\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{F}/\boldsymbol{E})$ est la sous-catégorie pleine de $\Pi_{\boldsymbol{E}/\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{F}/\boldsymbol{E})$ engendrée par l'image du foncteur $\Pi(i)$. Il en résulte

que $\mu \in Fl(\underleftarrow{Lim}_{E/D}(F/E))$. De plus μ, qui est une flèche cartésienne de $\Pi_{E/D}(F/E)$, est aussi cartésienne dans $\underleftarrow{Lim}_{E/D}(F/E)$, car il y a "moins" de conditions à vérifier. D'où (ii).

Prouvons (iii). Il reste à voir que, si $x \in Fl(E')$ et si $d'(x) = (0,1)$, $m''(x)$ est cartésien. Or, d' est cofibrant, il existe donc $x' \in Fl(E')$, qui soit $\hat{\Delta}_1$ - co-cartésien, tel que

$$d'(x') = (0,1) \qquad \text{et} \qquad s(x') = s(x).$$

Il existe alors $u \in Fl(E')$ tel que

$$d'(u) = (0,0) \qquad \text{et} \qquad ux' = x.$$

On sait déjà que $m''(x')$ et $m''(u)$ sont cartésiens, donc aussi $m''(x) = m''(u)m''(x')$.

Preuve de 4.10.

Nous allons utiliser 1.8.(ii) en remarquant que l'on peut remplacer la condition " tout $m' \in K$ est hypercartésien " par la condition " tout $m' \in K$ est cartésien et le composé de deux flèches appartenant à K est cartésien".

Il résulte de 4.8. que, pour prouver que **toute** $\mu \in P$ **est cartésienne,** il suffit de prouver que pour tout $x \in Fl(E')$ tel que $d'(x) = (0,1)$ et tel que $m'(x)$ soit cocartésien, $m''(x)$ est cartésien. Soit donc une telle $x \in Fl(E')$. Puisque H définit un coclivage de d, l'ensemble

$$\{ H' = x \in Fl(E') \mid m'(x) \in H \} \tag{4.52}$$

définit un coclivage de d'. (énoncé dual de 1.9.).
Il existe donc $x' \in H'$ tel que

$$d(x') = (0,1) \qquad \text{et} \qquad s(x') = s(x),$$

donc il existe une flèche inversible (donc cocartésienne) de E', soit u, telle que

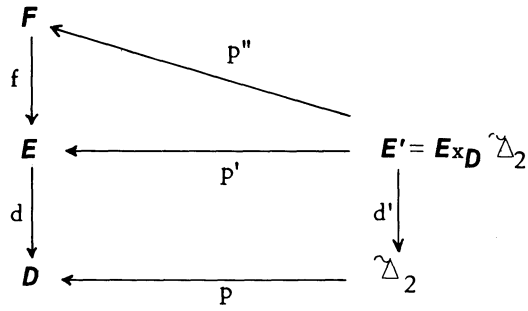
$$ux' = x \qquad \text{et} \qquad d'(u) = (1,1).$$

On sait que $m''(x') \in K$, donc est cartésien, on sait aussi que $m''(u)$ est inversible, donc cartésien, il en résulte que $m''(x) = m''(u)m''(x')$ est cartésien.

Donc μ vérifie (4.39), donc **est cartésien.**

Il nous faut encore prouver que le composé de deux éléments de P vérifie (4.39), ce qui prouvera que ce composé est cartésien. Il revient au même de prouver que **si un diagramme :**

(4.53)



vérifie la condition

(P) quel que soit $x \in Fl(E')$, si x est Δ_2- cocartésien et si $d'(x) = (0,1)$ ou $d'(x) = (1,2)$, $p''(x)$ est E-cartésien,

alors, pour tout $x \in Fl(E')$ tel que $d'(x) = (0,2)$, si x est Δ_2-co-cartésien $p''(x)$ est E- cartésien.

On a simplement traduit l'énoncé en termes du foncteur $\pi : \Delta_2 \to \Pi_{E/D}(F/E)$ qui correspond au couple de flèches composables en question et au diagramme (4.53).

Soit donc $x \in Fl(E')$ tel que $d'(x') = (0,2)$. Puisque d' est cofibrant, il existe deux flèches composables et Δ_2-cocartésiennes de E', soient v et w, telles que

$$d'(v) = (0,1), \quad d'(w) = (1,2) \quad \text{et} \quad s(w) = s(x).$$

leur composé est lui-même cocartésien. Il existe donc $u \in Fl(E')$ caractérisé par

$$d'(u) = (0,0) \quad \text{et} \quad uvw = x\,.$$

Si l'on suppose que x est cocartésien, u est un isomorphisme. On sait alors que m"(u), m"(v) et m"(w) sont E-cartésiens, il en est donc de même de m"(x).

Terminons la preuve de 4.10.

Il reste à prouver que, pour tout $\xi \in Ob(\Pi_{E/D}(F/E))$ et tout $p \in Fl(D)$ tels que le but de p soit égal à $\Pi_{E/D}(f)(\xi)$, il existe une flèche unique $\pi \in P$, telle que

(4.54) $$\Pi_{E/D}(f)(\pi) = p\,, \qquad b(\pi) = \xi.$$

Il revient au même de prouver que, pour tout diagramme commutatif tel que (4.58) ci-dessous, dans lequel E' et E'' sont les produits fibrés évidents, il existe un foncteur

$$m'' : E' \to F\,,$$

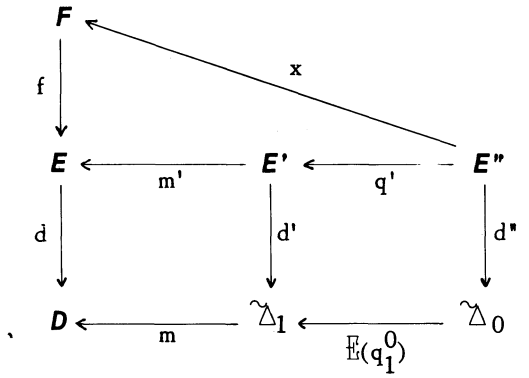
caractérisé par les conditions suivantes

(4.55) $\qquad m''q' = x$

(4.56) $\qquad fm'' = m'$

(4.57) [quel que soit $g \in Fl(\boldsymbol{E}')$ tel que $m'(g) \in H$ et $d'(m) = (0,1)$, on a $m''(g) \in K$] .

(4.58)



Construisons donc m".

Remarquons que q' induit un isomorphisme entre $\boldsymbol{E}''$ et la catégorie fibre de $\boldsymbol{E}'$ en objet 0 de Δ_1. En vertu de (4.55), ceci détermine la restriction de m" à la dite catégorie fibre.

Soit maintenant $a \in Fl(\boldsymbol{E}')$ et supposons que

$$d'(a) = (0,1) \quad \text{et} \quad m'(a) \in H.$$

si $b \in Ob(\boldsymbol{E}')$ désigne le but de a, on a vu qu'il existe un $b' \in Ob(\boldsymbol{E}'')$, uniquement déterminé par $q'(b') = b$ et tel que $m''(b) = x(b')$. On connait donc le but de m"(a), ainsi que sa projection sur $\boldsymbol{E}$: c'est m'(a) d'après (4.57). Or, il existe une seule flèche de K de but m(b) et se projettant sur m'(a), car K définit un clivage de f. Ce sera m"(a).

Définissons m"(b) pour tout $b \in Ob(\boldsymbol{E}')$ tel que $d'(b) = 1$. Il existe un $a \in Fl(\boldsymbol{E}')$, uniquement déterminé par

$$s(a) = b, \quad d'(a) = (0,1) \quad \text{et} \quad m'(a) \in H.$$

Connaissant m"(a), on connait m"(b) grâce à la compatibilité avec l'application source.

Soit $a \in Fl(\boldsymbol{E}')$ tel que $d'(a) = (0,1)$. Il existe une flèche a' de $\boldsymbol{E}'$, uniquement déterminée par

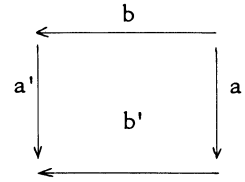
$$d'(a') = (0,1), \quad s(a') = s(a) \quad \text{et} \quad m'(a') \in H \ .$$

Il existe alors une $u \in Fl(\boldsymbol{E}')$, uniquement déterminée par

$$ua' = a,\ d'(u) = (0,0).$$

Ce qui détermine $m''(a)$. Remarquons que si $m'(a) \in H$, on a $a' = a$ et l'on retrouve la même valeur pour $m''(a)$.

Il reste à définir $m''(a)$ pour $a \in Fl(\boldsymbol{E}')$ tel que $d'(a) = (1.1)$. Il existe un diagramme commutatif :



uniquement déterminé par les conditions :

$$d'(a') = (0,0),\ d'(b) = d'(b') = (0,1)\ ,$$
$$m'(b) \in H \quad \text{et} \quad m'(b') \in H\ .$$

Or on sait que $m''(b') \in K$, donc est hypercartésien, il en résulte que $m''(a)$ est déterminé sans ambigüité par

$$m''(a')m''(b) = m''(b')m''(a).$$

Le lecteur voudra bien nous pardonner (ou rendre grâces) de ne pas vérifier que l'on a bien défini un foncteur répondant aux conditions requises.

On a ainsi prouvé que P définit un clivage de $\Pi_{\boldsymbol{E}/\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{F}/\boldsymbol{E})$ sur $\boldsymbol{D}$ et que $\Pi_{\boldsymbol{E}/\boldsymbol{D}}(f)$ est fibrant.

Preuve de 4.11. Résulte trivialement de ce qui précède.

Preuve de 4.12. On a déjà prouvé le " il suffit ". Remarquons que si $\mu \in Fl(\Pi_{\boldsymbol{E}/\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{F}/\boldsymbol{E}))$ est $\boldsymbol{D}$-cartésienne, il existe $\nu \in P$, telle que

$$\Pi_{\boldsymbol{E}/\boldsymbol{D}}(f)(\nu) = \Pi_{\boldsymbol{E}/\boldsymbol{D}}(f)(\mu) \quad \text{et} \quad b(\nu) = b(\mu).$$

Il existe également un **isomorphisme** $\iota \in Fl(\Pi_{\boldsymbol{E}/\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{F}/\boldsymbol{E}))$ se projettant sur la flèche identique de la source de μ et tel que

$$\nu\,\iota = \mu\ .$$

Par construction, ν vérifie (4.39)„ il est facile de voir qu'il en est de même de ι et donc de μ, d'après 4.13.

Le Resp. est innoffensif.

Preuve de 4.7. Comme nous l'avons déjà remarqué, il suffit de prouver (4.36).

Un objet de $\underset{\leftarrow}{Lim}(\underset{\leftarrow}{Lim}_{E/D}(F/E)/D)$ est un foncteur :

$$p : D \to \Pi_{E/D}(F/E)$$

tel que

$$\Pi_{E/D}(f).p = \text{identité} \tag{4.59}$$

et tel que, pour tout $q \in Fl(D)$, $p(q)$ soit une flèche cartésienne de $\underset{\leftarrow}{Lim}_{E/D}(F/E)$. Nous devons prouver que cette dernière condition équivaut à dire que p se factorise par $\Pi_{E/D}(F^C/E)$. Ce qui revient à prouver que, pour tout $\mu \in Fl(\Pi_{E/D}(F/E))$, les conditions suivantes sont équivalentes :

a) μ est une flèche cartésienne de $\underset{\leftarrow}{Lim}_{E/D}(F/E)$;

b) μ appartient à l'image par $\Pi(i)$ de $Fl(\Pi_{E/D}(F^C/E))$.

Si l'on a (a), μ vérifie (4.39) d'après 4.12 et le but de μ appartient à l'image par $\Pi(i)$ de $Ob(\Pi_{E/D}(F^C/E))$ par définition de $\underset{\leftarrow}{Lim}_{E/D}(F/E)$. On a donc (b), d'après 4,9.(iii).

Si l'on a (b), il est clair que $\mu \in Fl(\underset{\leftarrow}{Lim}_{E/D}(F/E))$ et de plus μ vérifie (4.39) donc est cartésienne dans $\underset{\leftarrow}{Lim}_{E/D}(F/E)$ d'après 4.9.(ii).

C.Q.F.D.

4 - d) - Propriétés fonctorielles.

Rappelons que, par définition de $\Pi_{E/D}(F/E)$, la formation d'icelui commute au changement de base D. Ceci signifie que, si l'on s'est donné deux foncteurs f et d comme plus haut et si l'on a construit une solution du problème universel posé, c'est à dire un diagramme tel que (4.9), choisissant un changement de base :

$$v : V \to D,$$

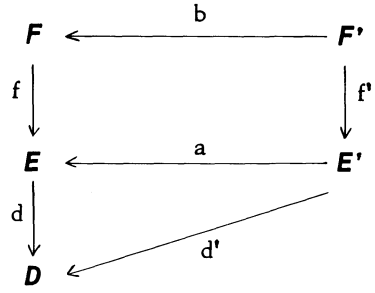
le diagramme déduit de (4.9) par le changement de base v fournit une solution du même problème, relatif cette fois aux foncteurs :

$$f^v : Fx_D V \to E x_D V \quad \text{et} \quad d^v : E x_D V \to V.$$

Nous allons maintenant étudier une propriété de fonctorialité de Π.

Soit un diagramme **commutatif :**

(4.60)



Supposons que les foncteurs d et d' soient **cofibrants** et que F' soit un **produit fibré** de F et de E' au dessus de E. Supposons de plus que f soit **fibrant,** ce qui entraîne que f' l'est aussi. Désignons par :

(4.61) $$K : \left((Cat)_{/D}\right)^{o} \to (Ens)$$

le foncteur qui, à tout $(X,x) \in Ob(Cat)_{/D}$, associe

$$K(X,x) = Hom_E(E \times_D X, F)$$

et par

(4.62) $$K' : \left((Cat)_{/D}\right)^{o} \to (Ens)$$

le foncteur qui, à tout $(X,x) \in Ob(Cat)_{/D}$, associe

$$K'(X,x) = Hom_{E'}(E' \times_D X, F').$$

Désignons par H le sous-foncteur de K défini par :

(4.63) $$H'(X.x) = Hom_E(E \times_D X, F^c),$$

où F^c désigne la sous-catégorie de F dont les flèches sont les flèches E-cartésiennes de F.

Soit H' le sous-foncteur de K' défini de manière analogue :

(4.64) $$H'(X,x) = Hom_{E'}(E' \times_D X, F'^c).$$

Il est clair que l' on a un morphisme de foncteurs :

(4.65) $$m : K \to K',$$

défini grâce au fait que F' est un produit fibré. Il est clair que m **induit** un morphisme de foncteurs :

(4.66) $$n : H \to H',$$

en effet, en vertu des propriétés élémentaires des morphismes cartésiens, F'^c est un **produit fibré** de F^c et de E' au dessus de E. Si l'on passe aux objets de $(Cat)_{/D}$ qui représentent les foncteurs K,K',H et H', on trouve

un carré commutatif **dans** $(Cat)_{/D'}$ où i et i' sont des monomorphismes :

$$\begin{array}{ccc} \Pi_{E/D}(F/E) & \xleftarrow{\ i\ } & \Pi_{E/D}(F^{C}/E) \\ \downarrow{\scriptstyle m} & & \downarrow{\scriptstyle n} \\ \Pi_{E'/D}(F'/E') & \xleftarrow{\ i'\ } & \Pi_{E'/D}(F'^{C}/E') \end{array} \tag{4.67}$$

On a négligé de figurer D.

Se souvenant de la définition de $\underset{\leftarrow}{Lim}_{E/D}(F/E)$ comme sous-catégorie pleine de $\Pi_{E/D}(F/E)$ engendrée par l'image du foncteur i,(4.35), on déduit un D-foncteur **cartésien** :

$$p : \underset{\leftarrow}{Lim}_{E/D}(F/E) \to \underset{\leftarrow}{Lim}_{E'/D}(F'/E'). \tag{4.68}$$

L'adjectif cartésien étant justifié par le fait que les flèches cartésiennes de $\underset{\leftarrow}{Lim}_{E/D}(F/E)$ sont celles qui proviennent par i d'une flèche de $\Pi_{E/D}(F^{C}/E)$, cf. 4.12. et 4.9.(iii).

Il est clair que, si l'on fait subir au diagramme (4.60) un changement de base :

$$v : V \to D,$$

le foncteur analogue à p s'obtient en faisant subir à p le même changement de base.

En particulier, soit $S \in Ob(D)$ et soit :

$$\sigma : \Delta_0 \to D \quad , \quad \sigma(0) = S,$$

le foncteur correspondant. Le foncteur déduit de p par le changement de base σ s'identifie au foncteur p_S induit par p sur les fibres en $S \in Ob(D)$ des foncteurs $\underset{\leftarrow}{Lim}_{E/D}(f)$ et $\underset{\leftarrow}{Lim}_{E'/D}(f')$. Puisque la formation de p commute au changement de la base D, le foncteur p_S s'identifie aussi au foncteur construit comme p, mais à partir du diagramme déduit de (4.60) par le changement de base σ :

$$\begin{array}{ccccc} F_S = F \times_E (E_S) & \longleftarrow & & & F' \times_{E'} (E'_S) = F'_S \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ E_S & \longleftarrow & & & E'_S \\ \downarrow & & \searrow & & \\ \Delta_0 & & \longleftarrow & & \end{array} \tag{4.69}$$

Or $\mathbb{\Delta}_0$ est un objet final de (Cat) on a donc un isomorphisme

(4.70) $$\underset{\leftarrow}{Lim}_{E_S/\,\mathbb{\Delta}_0}(F_S/E_S) \xrightarrow{\sim} \underset{\leftarrow}{Lim}(F_S/E_S),$$

grâce auquel le foncteur déduit de p par le changement de base

$$\sigma : \mathbb{\Delta}_0 \to D$$

s'identifie au foncteur :

$$\underset{\leftarrow}{Lim}(F_S/E_S) \to \underset{\leftarrow}{Lim}(F'_S/E'_S),$$

lequel est défini par le fait que le carré de (4.69) est un produit fibré. En résumé :

Proposition 4.14. Soit un diagramme tel que (4.60), dans lequel le carré est un **produit fibré.** Supposons également que d et d'soient **cofibrants** et que f soit **fibrant** (donc aussi f'). Désignons par

(4.71) $$\mathbb{F} : \mathbb{L}F \to D$$

la D-catégorie $\underset{\leftarrow}{Lim}_{E/D}(f) : \underset{\leftarrow}{Lim}_{E/D}(F/E) \to D$, (4.35), et par

(4.72) $$\mathbb{F}' : \mathbb{L}F' \to D$$

la D-catégorie $\underset{\leftarrow}{Lim}_{E'/D}(f') : \underset{\leftarrow}{Lim}_{E'/D}(F'/E') \to D$.

(i) il existe un D-foncteur cartésien dont la formation commute au changement de la base D.

(4.73) $$p : \mathbb{L}F \to \mathbb{L}F'.$$

(ii) par les isomorphismes du théorème 4.7. :

$$\underset{\leftarrow}{Lim}(\mathbb{L}F/D) \xrightarrow{\sim} \underset{\leftarrow}{Lim}(F/E)$$

$$\underset{\leftarrow}{Lim}(\mathbb{L}F'/D) \xrightarrow{\sim} \underset{\leftarrow}{Lim}(F'/E'),$$

le foncteur déduit de p par passage aux $\underset{\leftarrow}{Lim}(*/D)$:

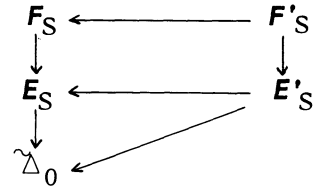
(4.74) $$\underset{\leftarrow}{Lim}(\mathbb{L}F/D) \to \underset{\leftarrow}{Lim}(\mathbb{L}F'/D)$$

s'identifie au foncteur défini par le fait que le carré de (4.60) est un produit fibré :

(4.75) $$\underset{\leftarrow}{Lim}(F/E) \to \underset{\leftarrow}{Lim}(F'/E').$$

(iii) de plus, pour tout $S \in Ob(D)$, si on désigne par

(4.76)



le diagramme déduit de (4.60) par le changement de base
$\sigma : \Delta_0 \to \boldsymbol{D}$, $\sigma(0) = S$, le foncteur

(4.77) $$p_S : \mathbb{L}\boldsymbol{F}_S \to \mathbb{L}\boldsymbol{F}'_S$$

induit par p sur les fibres en S s'identifie par les isomorphismes (4.70) au foncteur défini par le fait que le carré de (4.76) est un produit fibré :

(4.78) $$\boldsymbol{Lim}_{\leftarrow}(\boldsymbol{F}_S / \boldsymbol{E}_S) \to \boldsymbol{Lim}_{\leftarrow}(\boldsymbol{F}'_S / \boldsymbol{E}'_S) .$$

5 - Sections cartésiennes et limites projectives de catégories.

Le but de ce numéro est de montrer comment toute catégorie fibrée φ: F $\to$ **E** est canoniquement équivalente à une catégorie scindée, c'est à dire construire à partir d'un foncteur $\mathfrak{F}$**F** : **E**$^o \to$ (Cat), (penser à un système projectif de catégories), par le procédé de SGA VI 9. La construction que nous allons décrire aura la propriété remarquable que **la catégorie limite projective du foncteur $\mathfrak{F}$F sera isomorphe à la catégorie $\underset{\leftarrow}{Lim}$(F/E).** Ce résultat, dont la démonstration n'utilise pas les sorites entassés jusqu'ici, permet, dans une large mesure, de faire fi des clivages et de leurs identifications canoniques et aussi, mais en prenant des précautions, (cf.5.12.), de calculer sur une limite projective ordinaire de catégories plutôt que sur une catégorie $\underset{\leftarrow}{Lim}$.

5 - a) La catégorie fibrée associée à un foncteur P : **E**$^o \to$ (Cat).

Pour la commodité du lecteur, nous rappelons la construction de SGA VI 9. Tout d'abord, désignons par :

(5.1) **Fib(E)** la catégorie dont les objets sont les **E** - catégories fibrées et dont les morphismes sont les **E**-foncteurs cartésiens et par

(5.2) **Sci(E)** la catégorie **Hom(E**^{o},(Cat)) des foncteurs contravariants définis sur **E** et à valeurs dans la catégorie des $\mathbb{U}$-catégories.

La notation **Sci(E)** suggère plutôt qu'il s'agit de la catégorie dont les objets sont les **E**-catégories **munies** d'un scindage, les morphismes étant les **E**-foncteurs qui respectent ce scindage, i.e. qui transforment morphismes de transport en morphismes de transport (cf.1.5.), ce qui entraîne qu'ils sont cartésiens. Mais la construction de SGA VI 9 induit une équivalence de catégories entre **Sci(E)** et cette dernière, ce qui fait que notre notation n'est pas gênante.

Construisons un foncteur :

(5.3) $$\Phi : \mathbf{Sci(E)} \to \mathbf{Fib(E)}.$$

Soit P : **E**$^o \to$ (Cat) un objet de **Sci(E)** et soit

(5.4) $$\varphi P : \Phi P \to \mathbf{E}$$

la **E**-catégorie fibrée construite comme suit :

(5.5) $$Ob(\Phi P) = \{(S,x),\ S \in Ob(\mathbf{E}),\ x \in Ob(P(S))\},$$

la projection de (S,x) étant S; en formule :

$$\varphi P((S,x)) = S.$$

Si (S,x) et (T,y) sont deux objets de ΦP et si $f : T \to S$ est une flèche de $\boldsymbol{E}$, on définit par

(5.6) $$\mathrm{Hom}_f((T,y), (S,x)) = \mathrm{Hom}_{P(T)}(y, P(f)(x))$$

l'ensemble des flèches de ΦP de source (T,y) et de but (S,x) qui se projettent sur f. D'une manière générale, si $f : T \to S$ est une flèche de $\boldsymbol{E}$ et si x est un objet ou une flèche de P(S), on posera

(5.7) $$x^f = P(f)(x) \quad , \quad P(f) : P(S) \to P(T).$$

La formule (5.6) prend alors une forme plus concise :

(5.8) $$\mathrm{Hom}_f((T,y), (S,x)) = \mathrm{Hom}(y, x^f) .$$

En particulier, la flèche identique de x^f définit une flèche de ΦP

(5.9) $$c_f(x) : (T, x^f) \to (S,x) ,$$

qui se projette sur f, qui est cartésienne et qui, par définition, est, dans ΦP, **le morphisme de transport de but** (S,x) **et de projection** f. L'ensemble de ces morphismes définira le scindage de Φ P, (que l'on s'empresse d'oublier).

Etant données deux flèches composables de ΦP :

$$z \overset{\beta}{\to} y \overset{\alpha}{\to} x$$

se projettant sur

$$U \overset{g}{\to} T \overset{f}{\to} S$$

et correspondant à des morphismes

$$v : z \to y^g \qquad u : y \to x^f ,$$

leur composé $\alpha\beta : z \to x$ est défini par le fait qu'il se projette sur fg et qu'il correspond au composé de

$$z \overset{v}{\to} y^g \overset{u^g}{\to} (x^f)^g = x^{fg} .$$

La formation de ΦP est fonctorielle en P de manière évidente. Explicitons un peu. Soit $m : P \to Q$ une flèche de $\boldsymbol{Sci(E)}$, il lui correspond un $\boldsymbol{E}$-foncteur cartésien

(5.10) $$\Phi m : \Phi P \to \Phi Q,$$

$$(S,x) \rightsquigarrow (S, m(S)(x)), \quad S \in Ob(\boldsymbol{E}), \ x \in Ob(P(S)).$$

Il est clair que Φm est un morphisme de catégories scindées (i.e. respecte les morphismes de transport (5.9)), ce qui fait que le foncteur Φ n'est généralement pas pleinement fidèle, puisqu'il oublie le scindage de ΦP. Il est **fidèle.**

Remarque 5.1. La formation du foncteur Φ commute au changement de base E. Il suffit d'énoncer précisément la chose pour qu'elle soit claire. Soit $P : E^o \to (Cat)$ un objet de $Sci(E)$ et soit $u : E' \to E$ un foncteur. Soit ΦP la E-catégorie scindée associée à P, soit $Q = \Phi P \times_E E'$ la catégorie qui s'en déduit par le changement de base u et soit $P' = Pu$ la restriction de P à E'. Il est clair que Q, avec son scindage, est canoniquement isomorphe à $\Phi' P'$, où Φ' est l'analogue du foncteur Φ, relatif à E'.

Remarque 5.2. Soit $P : E^o \to (Cat)$ un objet de $Sci(E)$, nous allons décrire, d'après 1,7., la catégorie $\underset{\leftarrow}{Lim}(\Phi P/E)$.

- un objet est essentiellement **un couple** formé d'une famille $(x_S)_{S \in Ob(E)}$, $x_S \in Ob(P(S))$, et d'une famille $(u_f)_{f \in Fl(E)}$, $f : T \to S$, $u_f \in Isom(x_T, x_S^f)$, **assujetti à vérifier**, pour tout couple $U \xrightarrow{g} T \xrightarrow{f} S$ de flèches composables de E.

$$u_{fg} = u_f^g . u_g \quad . \tag{5.11}$$

Une section cartésienne définie comme ci dessus sera notée (x,u). Un morphisme de sections cartésiennes :

$$m : (y,v) \to (x,u)$$

est essentiellement une famille $(m_S)_{S \in Ob(E)}$, $m_S \in Hom(y_S, x_S)$, telle que pour toute flèche $f : T \to S$ de E, on ait

$$m_S^f . v_f = u_f . m_T \quad . \tag{5.12}$$

Les morphismes se composent de manière évidente et se transportent de manière non moins évidente par changement de base E ou morphisme de $Sci(E)$.

Sachant que la catégorie $\underset{\leftarrow}{lim}\ P$ a pour objets la limite projective des ensembles d'objets des P(S), $S \in Ob(E)$, il est clair qu'un objet de $\underset{\leftarrow}{lim}\ P$ est une famille $(x_S)_{S \in Ob(E)}, x_S \in Ob(P(S))$, assujettie à vérifier $x_S^f = x_T$, pour toute flèche $f : T \to S$ de E. Un tel objet définit donc une section cartésienne de $\underset{\leftarrow}{Lim}(\Phi P/E)$, où les u_f sont les morphismes identiques des x_T. En fait, on a un foncteur

$$\psi P : \underset{\leftarrow}{lim}\ P \to \underset{\leftarrow}{Lim}(\Phi P/E) \ , \tag{5.13}$$

dont l'action sur les flèches est évidente.

Lemme 5.3. Pour tout objet P de **Sci(E)**, le foncteur ψP de (5.13) est pleinement fidèle et injectif sur les objets. Pour qu'une section cartésienne s de ΦP appartienne à l'image de ΦP, il faut et il suffit que,

pour toute flèche $f : T \to S$ de $\boldsymbol{E}$, $s(f)$ soit un morphisme de transport de ΦP, cf. (5.9).

Evidemment.

Remarque 5.4. Ne pas croire que (5.13) est une équivalence de catégories. Par exemple, soit $G : \boldsymbol{E}^o \to (Ab)$ un foncteur contravariant défini sur $\boldsymbol{E}$ et à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens. Considérant un groupe abélien comme une catégorie dont l'unique objet est l'élément neutre du groupe et dont les morphismes sont les éléments du groupe, on déduit de G un foncteur $G' : \boldsymbol{E}^o \to (Cat)$. La limite projective de G' est la catégorie associée au groupe $\varprojlim G$ et n'a donc qu'un seul objet. Posons $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}\varprojlim(\Phi G'/\boldsymbol{E})$. Puisque, pour tout $S \in Ob(\boldsymbol{E})$, la catégorie G'(S) n'a qu'un seul objet, un objet de $\boldsymbol{L}$ est essentiellement une famille $(u_f)_{f \in Fl(\boldsymbol{E})}$, $f : T \to S$, $u_f \in G(T)$, vérifiant $u_{fg} = u_f {}^g u_g$. De plus, tout objet de $\boldsymbol{L}$ isomorphe au précédent est de la forme $v_f = m_S {}^f u_f . (m_T)^{-1}$, où $(m_S)_{S \in Ob(\boldsymbol{E})}$, $m_S \in G(S)$, est une famille. D'après les formules connues ([CR]), on en déduit que l'ensemble des classes à isomorphisme près d'objets de $\boldsymbol{L}$ est l'ensemble sous-jacent au groupe $\varprojlim{}^1 G$, valeur en G du premier foncteur dérivé du foncteur $\varprojlim$. Par suite, si (5.13) est une équivalence pour tout P, le foncteur $\varprojlim$ est exact à droite.

Remarque 5.5. Si $u : P \to Q$ est un morphisme de $\boldsymbol{Sci}(\boldsymbol{E})$, et si, pour tout $S \in Ob(\boldsymbol{E})$, le foncteur $u(S) : P(S) \to Q(S)$ est fidèle (resp. pleinement fidèle) (resp. un isomorphisme), le foncteur $\varprojlim u : \varprojlim P \to \varprojlim Q$ est fidèle (resp. pleinement fidèle) (resp. un isomorphisme). Mais, si, pour tout $S \in Ob(\boldsymbol{E})$, le foncteur $u(S)$ est une équivalence, le foncteur $\varprojlim u$ **n'est pas,** en général, une équivalence, bien que le foncteur évident $\boldsymbol{L}\varprojlim(\Phi P/\boldsymbol{E}) \to \boldsymbol{L}\varprojlim(\Phi Q/\boldsymbol{E})$ soit une équivalence puisque le foncteur $\Phi u : \Phi P \to \Phi Q$ est une $\boldsymbol{E}$-équivalence, SGA VI 4. On construit aisément un contre-exemple en prenant pour $\boldsymbol{E}$ la catégorie $\cdot \leftarrow \cdot \rightarrow \cdot$, pour P une catégorie scindée équivalente à $\boldsymbol{E}$ telle que $\varprojlim P = \phi$ et pour m la projection de ΦP.

5 - b) Construction du système projectif $\mathfrak{F}: E^0 \to (\mathrm{Cat})$ *associé à une* E*-catégorie fibrée* $\varphi: F \to E$.

Pour éviter quelques vérifications de fonctorialité, il faut être un peu pédant. Pour toute catégorie E, on a un foncteur

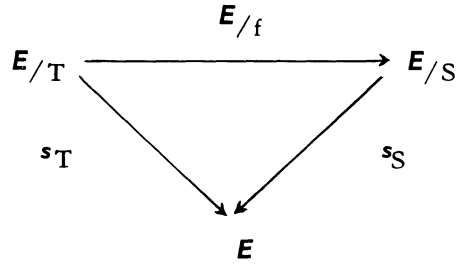
$$E_{/} : E \to (\mathrm{Cat})_{/E} \tag{5.14}$$

défini de la manière suivante. A tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$ on associe l'objet de $(\mathrm{Cat})_{/E}$

$$E_{/S} \to E, \quad (x : X \to S) \rightsquigarrow X, \tag{5.15}$$

c'est à dire **le foncteur source** de (1.29). On notera que ce foncteur est fibrant (et même discret, 6.1) et que tous les morphismes de $E_{/S}$ sont E-cartésiens. A toute flèche $f: T \to S$ de E, on associe une flèche de $(\mathrm{Cat})_{/E}$, autrement dit un triangle commutatif

(5.16)



cf. (1.30)

où $E_{/f}$ est défini par son action sur les flèches :

$$E_{/f}((x,y)) = (fx,y), \tag{5.17}$$

où $V \xrightarrow{y} U \xrightarrow{x} T$ est une flèche de $E_{/T}$.

Par ailleurs, pour tout couple (U,V) de E-catégories, on a défini, (cf.(1.23)), une catégorie $\mathrm{Hom}_{E/.}\hat{}(U,V)$ qui est la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Hom}_{E/.}(U,V)$ dont les objets sont les E-foncteurs qui transforment **tout** morphisme de U en un morphisme E-cartésien de V. Il est facile de voir, par exemple à partir du sorite de $\mathrm{Hom}_{E/.}(U,V)$ développé dans SGA VI 3, que $\mathrm{Hom}_{E/.}\hat{}(U,V)$ est fonctoriel en V si l'on n'admet que les E-foncteurs **cartésiens** et contrafonctoriel en U, mais cette fois on peut admettre tous les E-foncteurs, cartésiens ou non. D'où, pour toute E-catégorie $\varphi : F \to E$, un foncteur

$$\mathfrak{F}_F : E^0 \to (\mathrm{Cat}), \tag{5.18}$$

obtenu en composant l'opposé de $E_{/}$ et le foncteur

$$(\mathrm{Cat})_{/E} \to (\mathrm{Cat}), U \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{E/.}\hat{}(U,F).$$

Pour tout $S \in Ob(\boldsymbol{E})$, on a

(5.19) $\mathfrak{F}\boldsymbol{F}(S) = \boldsymbol{Hom}_{\boldsymbol{E}/.}\hat{}(\boldsymbol{E}_{/S}, \boldsymbol{F}) = \boldsymbol{Hom}_{cart}(\boldsymbol{E}_{/S}, \boldsymbol{F}) \cong \underset{\leftarrow}{\boldsymbol{Lim}}\,(\boldsymbol{F}^{S}/(\boldsymbol{E}_{/S}))$,

où l'on a posé $\boldsymbol{F}^{S} = \boldsymbol{F} \times_{\boldsymbol{E}} (\boldsymbol{E}_{/S})$. En effet, tous les morphismes de $\boldsymbol{E}_{/S}$ sont $\boldsymbol{E}$-cartésiens.

Comme il vient d'être dit, cette construction est fonctorielle en $\boldsymbol{F}$, du moins si l'on n'admet que les $\boldsymbol{E}$-foncteurs cartésiens; autrement dit, on a défini un foncteur :

(5.20) $$\mathfrak{F} : \boldsymbol{Fib}(\boldsymbol{E}) \to \boldsymbol{Sci}(\boldsymbol{E}) .$$

5 - c). Propriétés des constructions précédentes.

Nous allons, pour toute $\boldsymbol{E}$-catégorie fibrée $\boldsymbol{F}$, construire un $\boldsymbol{E}$-foncteur cartésien :

(5.21) $$v\boldsymbol{F} : \Phi\mathfrak{F}\boldsymbol{F} \to \boldsymbol{F} ,$$

où $\mathfrak{F}$ et Φ sont les foncteurs définis respectivement par (5.20) et (5.3). Nous monterons que $v\boldsymbol{F}$ est une $\boldsymbol{E}$-équivalence 5.6., et que le couple ($\mathfrak{F}$F, vF) définit, en $\boldsymbol{F}$, un coadjoint du foncteur Φ, 5.9. **Ce qui prouvera que $v\boldsymbol{F}$ est fonctoriel en $\boldsymbol{F}$.** Si le foncteur $\varphi : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$ n'est plus supposé fibrant, la construction de $\mathfrak{F}\boldsymbol{F}$ et de $v\boldsymbol{F}$ garde un sens mais ne possède plus les mêmes propriétés.

Pour tout $S \in Ob(\boldsymbol{E})$, on a un foncteur

(5.22) $$v_S : \mathfrak{F}\boldsymbol{F}(S) \to \boldsymbol{F}$$
$$(x : \boldsymbol{E}_{/S} \to \boldsymbol{F}) \rightsquigarrow x(id_S) ,$$

que l'on appelle "**foncteur valeur en** S" et qui applique $\mathfrak{F}\boldsymbol{F}(S)$ dans la catégorie fibre $\boldsymbol{F}_S$ de $\boldsymbol{F}$ en S. Nous allons construire $v\boldsymbol{F}$ de telle sorte que, pour tout $S \in Ob(\boldsymbol{E})$, modulo l'identification de $\mathfrak{F}\boldsymbol{F}(S)$ avec la fibre de $\Phi\mathfrak{F}\boldsymbol{F}$ en S, le foncteur $v\boldsymbol{F}$ induise sur les fibres en S le foncteur v_S. Nous connaissons donc l'action de $v\boldsymbol{F}$ sur les objets et sur les flèches qui se projettent sur une flèche identique de $\boldsymbol{E}$.

Soit $\mu : (T,y) \to (S,x)$ une flèche de $\Phi\mathfrak{F}\boldsymbol{F}$ se projettant sur une flèche $f : T \to S$ de $\boldsymbol{E}$. Par définition de Φ, x et y sont des $\boldsymbol{E}$-foncteurs cartésiens

(5.23) $$x : \boldsymbol{E}_{/S} \to \boldsymbol{F} \quad \text{et} \quad y : \boldsymbol{E}_{/T} \to \boldsymbol{F},$$

et μ est déterminé par un morphisme de $\mathfrak{F}\boldsymbol{F}(T)$, $u : y \to x^{f}$, c'est à dire un $\boldsymbol{E}$-morphisme de foncteurs

(5.24) $$u : y \to x^{f} = x.\boldsymbol{E}_{/f} .$$

On a ainsi deux flèches composables de $\boldsymbol{F}$

$$x(id_S) \xleftarrow{x(id_S,f)} x(f) = x^f(id_T) \xleftarrow{u(id_T)} y(id_T) \tag{5.25}$$

qui se projettent sur

$$S \xleftarrow{f} T \xleftarrow{id_T} T$$

car x est un $\boldsymbol{E}$-foncteur et u est un $\boldsymbol{E}$-morphisme. Par définition, le composé des flèches (5.25) sera la valeur en μ du foncteur $v\boldsymbol{F} : \Phi\S\boldsymbol{F} \to \boldsymbol{F}$. Il est clair, par construction, que $v\boldsymbol{F}$ est un $\boldsymbol{E}$-foncteur cartésien et qu'il induit sur les fibres en $S \in Ob(\boldsymbol{E})$ le foncteur valeur en S de (5.22).

Proposition 5.6. Pour tout foncteur fibrant $\varphi : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$, le foncteur $v\boldsymbol{F} : \Phi\S\boldsymbol{F} \to \boldsymbol{F}$ de (5.21) est une $\boldsymbol{E}$-équivalence de catégories. De plus, il est surjectif sur les objets.

D'après SGA VI 4.3. et SGA VI 6.10., pour montrer que $v\boldsymbol{F}$ est une $\boldsymbol{E}$-équivalence, il suffit de prouver que, pour tout $S \in Ob(\boldsymbol{E})$, il induit une équivalence de catégories entre les fibres en S. En effet, $v\boldsymbol{F}$ est évidemment cartésien. La proposition résultera donc du lemme suivant :

Lemme 5.7. Pour tout foncteur $\varphi : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$ et tout objet final e de $\boldsymbol{E}$, le foncteur valeur en e :

$$\underleftarrow{Lim}(\boldsymbol{F}/\boldsymbol{E}) \to \boldsymbol{F}_e \quad , \quad s \rightsquigarrow s(e), \tag{5.26}$$

où $\boldsymbol{F}_e$ désigne la catégorie fibre de $\boldsymbol{F}$ en e, est pleinement fidèle. Si φ est **fibrant** v_e est une équivalence de catégories; il est de plus surjectif sur les objets.

Pour démontrer la première partie du lemme, utilisons une construction qui sera reprise dans 7.a). Soit $\varphi : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$ un foncteur et soient s et t deux sections cartésiennes de φ. Il existe un foncteur

$$\boldsymbol{Hom}(s,t) : \boldsymbol{E}^o \to (\mathrm{Ens}) \tag{5.27}$$

défini comme suit. Pour tout $S \in Ob(\boldsymbol{E})$, on pose

$$\boldsymbol{Hom}(s,t)(S) = \mathrm{Hom}_S(s(S), t(S)) \tag{5.28}$$

et, pour tout flèche $f : T \to S$ de $\boldsymbol{E}$ et tout $u \in \boldsymbol{Hom}(s,t)(S)$, on pose $\boldsymbol{Hom}(s,t)(f)(u) = v$, où $v : s(T) \to t(T)$ est la flèche de $\boldsymbol{F}$ caractérisée par la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} s(S) & \xleftarrow{s(f)} & s(T) \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v} \\ t(S) & \xleftarrow[t(f)]{} & t(T) \end{array} \qquad \text{et par } \varphi(v) = id_T.$$

L'existence et l'unicité de v résultent du fait que t(f) est $\boldsymbol{E}$-cartésien. Pour tout $S \in Ob(\boldsymbol{E})$, on a une application

(5.29) $\qquad Hom(s,t) \to \boldsymbol{Hom}(s,t)(S)\ ,\ u \mapsto u(S),$

et, par définition d'un morphisme de foncteurs, les applications (5.29) définissent une **bijection**

(5.30) $\qquad Hom(s,t) \to \varprojlim \boldsymbol{Hom}(s,t)\ .$

D'où la première partie du lemme, puisque nous y supposons que e est un objet final de $\boldsymbol{E}$. Il reste à prouver que si le foncteur φ est fibrant le foncteur v_e est surjectif sur les objets. Soit donc $x \in Ob(\boldsymbol{F}_e)$. Pour tout $S \in Ob(\boldsymbol{E})$, soit $s : S \to e$ le morphisme final. Choisissons un morphisme cartésien de but e se projettant sur s et notons-le $\rho(s) : r(S) \to x$. Pour tout morphisme $f : T \to S$ de $\boldsymbol{E}$, on a $sf = t$, où s et t sont les morphismes finaux. Il existe une flèche $r(f) : r(T) \to r(S)$, caractérisée par $\varphi(r(f)) = f$ et $\rho(s)r(f) = \rho(t)$. En effet, $\rho(s)$ est cartésien. De plus, r(f) est cartésien, cf. 1.2. (i bis); En vertu des propriétés élémentaires des morphismes cartésiens, il est clair que r est une section cartésienne de φ. De plus, si l'on a choisi $\rho(id_e)$ égal à id_x, on a $r(s) = \rho(s)$ pour tout morphisme final s et $r(e) = x$.

C.Q.F.D.

On en déduit aisément le lemme suivant

Lemme 5.8. Soit $\varphi : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$ un foncteur et soit $S \in Ob(\boldsymbol{E})$.

(i) Pour tout couple (r, s) d'objets de $\mathfrak{F}\boldsymbol{F}(S)$, i.e. de $\boldsymbol{E}$-foncteurs cartésiens $r, s : \boldsymbol{E}_{/S} \rightrightarrows \boldsymbol{F}$, l'application

$$Hom(r,s) \to Hom_S(r(id_S), s(id_S)),\ m \mapsto m(id_S),$$

est bijective. De plus, si, pour tout objet $f : T \to S$ de $\boldsymbol{E}_{/S}$, on a $r(\dot{f}) = s(\dot{f})$, où

(5.31) $\qquad \dot{f} = (id_S, f) : f \to id_S$

est, dans $\boldsymbol{E}_{/S}$, le morphisme final de source f, alors $r = s$.

(ii) Supposons de plus que le foncteur φ soit **fibrant.** Soit $x \in Ob(\boldsymbol{F}_S)$ et soit, pour tout objet $f : T \to S$ de $\boldsymbol{E}_{/S}$, un morphisme $\boldsymbol{E}$-cartésien de $\boldsymbol{F}$, de but x et de projection f, noté $\rho(f)$. Si $\rho(id_S) = id_x$, il existe un objet r de $\mathfrak{F}\boldsymbol{F}(S)$ caractérisé par $r(\dot{f}) = \rho(f)$ pour tout $f \in Ob(\boldsymbol{E}_{/S})$. On a $r(id_S) = x$.

Théorème 5.9. Le foncteur $\mathfrak{S}$ de (5.20) est un coadjoint du foncteur Φ de (5.3). Plus précisément, pour toute $\boldsymbol{E}$-catégorie fibrée $\boldsymbol{F}$, le système projectif $\mathfrak{S}\boldsymbol{F} : \boldsymbol{E}^{o} \to$ (Cat) et le $\boldsymbol{E}$-foncteur cartésien $v\boldsymbol{F} : \Phi\mathfrak{S}\boldsymbol{F} \to \boldsymbol{F}$ possèdent la propriété universelle suivante

" pour tout objet P de $\boldsymbol{Sci(E)}$ l'application composée

$$\text{(5.32)} \qquad \begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}_{\sigma}(P, \mathfrak{S}\boldsymbol{F}) & \to & \mathrm{Hom}_{\rho}(\Phi P, \Phi\mathfrak{S}\boldsymbol{F}) & \to & \mathrm{Hom}_{\rho}(\Phi P, \boldsymbol{F}) \\ a & \rightsquigarrow & \Phi a & & b \rightsquigarrow v\boldsymbol{F}.b \end{array}$$

est bijective."

L'indice σ (resp. ρ) rappelle que les morphismes sont pris dans la catégorie $\boldsymbol{Sci(E)}$ (resp. $\boldsymbol{Fib(E)}$).

Montrons que (5.32) est **injective.** Soit $a : P \to \mathfrak{S}\boldsymbol{F}$ un morphisme de foncteurs. Posons $b = v\boldsymbol{F}.\Phi a$. Soit $S \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{E})$ et soit $x \in \mathrm{Ob}(P(S))$. Posons $\xi = a(S)(x)$; c'est un $\boldsymbol{E}$-foncteur cartésien $\xi : \boldsymbol{E}_{/S} \to \boldsymbol{F}$. Pour tout objet $f : T \to S$ de $\boldsymbol{E}_{/S}$, on a

$$\text{(5.33)} \qquad \xi(\dot{f}) = b(c_f(x)) \ ,$$

où $\dot{f}$ est défini par (5.31) et où $c_f(x)$ est, dans ΦP, le morphisme de transport de but (S,x) et de projection f, cf. (5.9). Cette formule résulte aisément du calcul de $v\boldsymbol{F}.\Phi a(c_f(x))$, cf. (5.25). D'après 5.8. (ii), elle montre que, si $a' : P \to \mathfrak{S}\boldsymbol{F}$ est un morphisme de $\boldsymbol{Sci(E)}$ vérifiant $v\boldsymbol{F}.\Phi a' = b$, les foncteurs a(S) et a'(S) coïncident sur les objets de P(S) pour tout $S \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{E})$. Soit maintenant $m : y \to x$ une flèche de P(S) et soit $\mu : \xi \to \eta$ son image par a(S). C'est un $\boldsymbol{E}$-morphisme de $\boldsymbol{E}$-foncteurs cartésiens $\xi, \eta : \boldsymbol{E}_{/S} \rightrightarrows \boldsymbol{F}$. Il est donc caractérisé par sa valeur sur id_S laquelle est donnée par

$$\text{(5.34)} \qquad \mu(\mathrm{id}_S) = b(m') \ ,$$

ou $m' : (S,y) \to (S,x)$ est, le morphisme de ΦP de projection id_S défini par m, cf. (5.6). Ceci montre que (5.32) est injective. Prouvons qu'elle est surjective. Soit $b : \Phi P \to \boldsymbol{F}$ un $\boldsymbol{E}$-foncteur **cartésien.** Nous devons construire un morphisme de $\boldsymbol{Sci(E)}$, $a : P \to \mathfrak{S}\boldsymbol{F}$, tel que $b = v\boldsymbol{F}.\Phi a$. Pour tout $S \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{E})$, tout $x \in \mathrm{Ob}(P(S))$ et tout objet $f : T \to S$ de $\boldsymbol{E}_{/S}$, posons $\zeta(f) = b(c_f(x))$. Puisque b est un $\boldsymbol{E}$-foncteur cartésien, $\zeta(f)$ est un morphisme cartésien de $\boldsymbol{F}$ de but (S,x) et de projection f, car $c_f(x)$ est un morphisme de transport. Posons $u = \mathrm{id}_S$, on a $\zeta(u) = \mathrm{id}_x$ car $c_u(x)$ est le morphisme identique de (S,x), puisque ΦP est scindée. D'après 5.8. (ii), il existe un objet ζ de $\mathfrak{S}\boldsymbol{F}(S)$ caractérisé par $\xi(\dot{f}) = b(c_f(x))$, $f \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{E}_{/S})$. Posons $a(S)(x) = \xi$. Soit $y \in \mathrm{Ob}(P(S))$ et soit $\eta = a(S)(y)$. Soit $m : y \to x$ un morphisme de P(S). Le foncteur

valeur en S étant pleinement fidèle, il existe un morphisme $\mu : \xi \to \eta$ de $\mathcal{S}F(S)$ caractérisé par $\mu(id_S) = b(m')$ ou m' est défini comme dans (5.34). Posons a(S)(m) = μ. Toujours d'après 5.8.(i), il est clair que, pour tout $S \in Ob(E)$, on définit ainsi un foncteur a(S) : P(S) $\to \mathcal{S}F(S)$. On montre, en utilisant 5.8.(ii) et les propriétés des morphismes cartésiens, que les a(S) définissent un morphisme de foncteurs $a : P \to \mathcal{S}F$. Posons $b' = v F \Phi a$ Pour achever la preuve de 5.9., il nous faut prouver que b = b'. D'après les formules (5.33) et (5,34), ces deux foncteurs coïncident sur les flèches de ΦP dont la projection est une flèche identique de E et sur les morphismes de transport de ΦP. Ils sont donc égaux puisque toute flèche m de ΦP est de la forme m = tu, où t est un morphisme de transport et où u est une flèche se projettant sur la flèche identique de la source de m.

C.Q.F.D.

Soit $\varphi : F \to E$ une E-catégorie.

Pour tout $S \in Ob(E)$, par composition avec le foncteur source, on a un foncteur

$$\underleftarrow{Lim}(F/E) = Hom_{E/.}\hat{}(E,F) \to Hom_{E/.}\hat{}(E_{/S},F) = \mathcal{S}F(S),$$

d'où, en vertu de la commutativité de (5.16), un foncteur

(5.35) $$r : \underleftarrow{Lim}(F/E) \to \underleftarrow{lim}\, \mathcal{S}F ,$$

lequel, d'après 1.12., est un isomorphisme.

Corollaire 5.10. Soit $\varphi : F \to E$ un foncteur, (qui n'est pas supposé fibrant). Le foncteur composé

(5.36) $$\underleftarrow{lim}\, \mathcal{S}F \xrightarrow{\psi^{\mathcal{S}F}} \underleftarrow{Lim}(\Phi \mathcal{S}F/E) \xrightarrow{v} \underleftarrow{Lim}(F/E)$$

où $\psi^{\mathcal{S}F}$ est foncteur de (5.13) et où v est défini par la composition avec le foncteur vF de (5.21), est un **isomorphisme** dont l'inverse est le foncteur r de (5.35). De plus, v et $\psi^{\mathcal{S}F}$ sont des équivalences.

Sachant que r est un isomorphisme, pour savoir que (5.36) est l'isomorphisme inverse de r. il suffit de vérifier que le composé $v.\psi^{\mathcal{S}F}.r$ est le foncteur identique de $\underleftarrow{Lim}(F/E)$, ce qui est aisé. De plus, vF est un E-foncteur cartésien pleinement fidèle en vertu de 5.8.(i), ce qui montre que v est pleinement fidèle. D'où la conclusion.

Notons que le fait que $\psi^{\mathcal{S}F}$ soit une équivalence est dû à la forme particulière de $\mathcal{S}F$, cf. 5.3. et 5.4.. De même, on peut préciser 5.5..

Corollaire 5.11. Soit $\varphi : F \to E$ une E-catégorie et soit $u : \mathcal{S}F \to P$ un morphisme de $Sci(E)$ tel que, pour tout $S \in Ob(E)$, $u(S)$ soit une équivalence. Le foncteur $\varprojlim u : \varprojlim \mathcal{S}F \to \varprojlim P$ est une équivalence.

En effet, d'après SGA VI 5.4., $\Phi u : \Phi\mathcal{S}F \to \Phi P$ est alors une E-équivalence et, par suite, le foncteur

$$U = \underset{\leftarrow}{Lim}(\Phi u) : \underset{\leftarrow}{Lim}(\Phi\mathcal{S}F/E) \to \underset{\leftarrow}{Lim}(\Phi P/E)$$

induit par la composition avec Φu est une équivalence. Or on a un diagramme commutatif dont les lignes sont définies par (5.13) et dont les colonnes sont induites par u

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim \mathcal{S}F & \xrightarrow{\ a\ } & \underset{\leftarrow}{Lim}(\Phi\mathcal{S}F/E) \\ \downarrow{\scriptstyle \varprojlim u} & & \downarrow{\scriptstyle U} \\ \varprojlim P & \xrightarrow[\ b\ ]{} & \underset{\leftarrow}{Lim}(\Phi P/E) \end{array} .$$

On sait que a est une équivalence, 5.10., on vient de voir qu'il en est de même de U et on sait, 5.3., que b est pleinement fidèle. D'où la conclusion.

Remarque 5.12. Soit $\varphi : F \to E$ un foncteur **fibrant** et soit $m : E' \to E$ un foncteur (considéré comme un changement de la base E). Pour tout $S' \in Ob(E')$, on a un foncteur restriction

$$\mathcal{S}F(S) \to \mathcal{S}'F'(S') \quad , \quad m(S') = S, F' = F \times_E E' \quad , \tag{5.37}$$

(où $\mathcal{S}'$ est l'analogue de $\mathcal{S}$ relatif à E'), qui est induit par la composition avec le foncteur

$$m_{/S'} : E'_{/S'} \to E_{/S} \ , \ m_{/S'}(x) = m(x), \tag{5.38}$$

Les foncteurs (5.37) induisent un morphisme de $Sci(E')$

$$\mathcal{S}F.m \to \mathcal{S}'F' \ , \tag{5.39}$$

qui, pour tout $S' \in Ob(E')$, induit (5.37). Or (5.37) est une équivalence de catégories. En effet, $m_{/S'}$ applique l'objet final de $E'_{/S'}$ sur celui de $E_{/S}$ cf. 5.7..

Cependant il est clair que la formation de $\mathcal{S}F$ **ne commute pas au** changement de base. En effet, $\mathcal{S}F$ est défini à isomorphisme près par sa propriété universelle, 5.9., et en général (5.39) n'est pas un isomorphisme, comme on voit en prenant pour E' une catégorie ponctuelle.

De manière concrète, pour étudier l'effet d'un changement de base sur les catégories $\underset{\leftarrow}{\boldsymbol{Lim}}$, on pourra remplacer $\boldsymbol{F}$ par $\Phi\mathfrak{F}\boldsymbol{F}$ d'après 5.6.. Mais on ne pourra pas, en général, remplacer $\boldsymbol{F}$ par le système projectif de catégories $\mathfrak{F}\boldsymbol{F}$. Cependant, la formation de $\mathfrak{F}\boldsymbol{F}$ **commute aux changements de base discrets,** i.e. tels que, pour tout $S' \in Ob(\boldsymbol{E}')$, le foncteur $m_{/S'}$ de (5.38) soit un **isomorphisme,** cf. 6.1.. En effet, dans ce cas, (5.37) et (5.39) sont évidemment des isomorphismes. Pour étudier l'effet d'un changement de base **discret** on pourra donc remplacer les catégories $\underset{\leftarrow}{\boldsymbol{Lim}}$ par des limites projectives ordinaires, grâce à 5.10..

6 - Cribles de descente.

Dans ce numéro, nous allons donner les définitions et propriétés essentielles de la théorie de la descente.

6 - a) Les cribles.

Etudions auparavant deux notions techniquement importantes : celle du foncteur discret et celle de crible..

Définition 6.1. Soit $u : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un foncteur. Pour tout $X \in Ob(\mathbf{A})$, désignons par :

$$u_{/X} : \mathbf{A}_{/X} \to \mathbf{B}_{/u(X)} \tag{6.1}$$

le foncteur qui, à tout objet $v : V \to X$ de $\mathbf{A}_{/X}$, associe $u(v) : u(V) \to u(X)$. On dit que le foncteur u est **discret** si, pour tout $X \in Ob(\mathbf{A})$, le foncteur $u_{/X}$ est un **isomorphisme.**

Exemple 6.2. Un foncteur source $s_S : \mathbf{E}_{/S} \to \mathbf{E}$, $S \in Ob(\mathbf{E})$, cf.(1.29), est discret. Un monomorphisme fibrant, cf.1.1.(iv)., est discret. Ces deux assertions résultent du lemme suivant :

Lemme 6.3. Soit $u : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un foncteur. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) u est discret

(ii) pour tout $X \in Ob(\mathbf{B})$, la catégorie $\mathbf{A}_X$, fibre de u en X, est discrète, (i.e. tous les morphismes y sont des flèches identiques), et, de plus, u est fibrant,

(iii) pour toute flèche de $\mathbf{B}$, $m : Y \to X$, et tout $X' \in Ob(\mathbf{A})$, tel que $u(X') = X$, il existe une flèche **unique** de $\mathbf{A}$, de but X' et de projection m.

(i) $\Rightarrow$ (iii) en effet, (iii) signifie que, pour tout $X' \in Ob(\mathbf{A})$, le foncteur $u_{/X'}$ induit un isomorphisme sur les objets.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Soit $X' \in Ob(\mathbf{A})$, posons $x = u(X')$. On sait déjà que $u_{/X'}$ est un isomorphisme sur les objets. Soit $X \overset{m}{\leftarrow} Y \overset{n}{\leftarrow} Z$ une flèche de $\mathbf{B}_{/X}$, par (iii) il existe une flèche unique $m' : Y' \to X'$ se projettant sur m, et aussi une flèche unique $n' : Z' \to Y'$ se projettant sur n, c'est-à-dire une flèche unique (m', n') de $\mathbf{A}_{/X'}$ se projettant sur (m, n).

(iii) $\Leftrightarrow$ (ii) trivial.

Lemme 6.4. Si $u : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ est un foncteur discret, il admet un clivage, unique. Celui-ci est un scindage. De plus tous les morphismes de $\mathbf{A}$ sont $\mathbf{B}$-cartésiens.

Trivial : exercice autour de 1.1., 1.2. et 1.5. .

Lemme 6.5. soient a, b et c trois foncteurs, ab = c, $\begin{array}{ccc} a & \swarrow\nwarrow & b \\ & \underset{c}{\leftarrow} & \end{array}$.
Si a est discret, pour que b le soit il faut et il suffit que c le soit.

Lemme 6.6. Soit $\begin{array}{ccc} & g' & \\ & \leftarrow & \\ f\downarrow & & \downarrow f' \\ & \underset{g}{\leftarrow} & \end{array}$ un carré cartésien dans (Cat) , i.e. un produit fibré de catégories. Si f est discret, f' l'est. Si, de plus, g l'est, alors g' et fg' = gf' le sont.

Toujours trivial.

Définition 6.7. Une sous-catégorie $\boldsymbol{C}$ d'une catégorie $\boldsymbol{E}$ est appelée un **crible de** $\boldsymbol{E}$ si le foncteur d'inclusion ι: $\boldsymbol{C} \to \boldsymbol{E}$ est **discret,** (c'est à dire, ici, fibrant).

Un crible est une sous-catégorie **pleine**, donc est caractérisé par son ensemble d'objets. Pour qu'un sous-ensemble de Ob($\boldsymbol{E}$) soit l'ensemble d'objets d'un crible il faut et il suffit qu'il contienne la source de toute flèche dont il contient le but.

Exemple 6.8. Soit S un préschéma et soit $\boldsymbol{E}$ la catégorie des préschémas au dessus de S. Soit G un S-groupe et P un S-préschéma où G opère à gauche de manière compatible avec les projections. L'ensemble des objets de $\boldsymbol{E}$, i.e. des "changements de base" S' → S, tels que $P' = P \times_S S'$ soit trivial sous $G' = G \times_S S'$, (i.e. P' admet une section) est l'ensemble des objets d'un crible (éventuellement vide) de $\boldsymbol{E}$. Dire que P est localement trivial pour la topologie plate, c'est dire que ce crible est un raffinement pour la dite topologie, cf. [AS] .

Pour toute catégorie $\boldsymbol{E}$, on désignera par $\emptyset(\boldsymbol{E})$ l'ensemble ordonné (par inclusion) **des cribles de $\boldsymbol{E}$.** Il est clair que la borne supérieure (resp. inférieure), dans l'ensemble de toutes les sous-catégories de $\boldsymbol{E}$, de toute famille de cribles de $\boldsymbol{E}$, existe et est un crible. Son ensemble d'objets (de flèches) est la réunion (resp. l'intersection) des ensembles d'objets (de flèches) des cribles de la famille.

Pour tout foncteur u : $\boldsymbol{E}' \to \boldsymbol{E}$ et tout crible $\boldsymbol{C}$ de $\boldsymbol{E}'$, la première projection de $\boldsymbol{E}' \times_{\boldsymbol{E}} \boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}'$ est un monomorphisme fibrant, car ces deux conditions sont stables par changement de base. Donc $\boldsymbol{C}'$ est un crible de $\boldsymbol{E}'$. On notera

(6.2) $$\begin{array}{rcl} \emptyset(u) : \emptyset(\boldsymbol{E}) & \to & \emptyset(\boldsymbol{E}') \\ \boldsymbol{C} & \rightsquigarrow & \boldsymbol{C} \times_{\boldsymbol{E}} \boldsymbol{E}' \end{array}$$

l'application induite par le changement de base sur les ensembles de cribles (image inverse) . On posera souvent

(6.3) $$\emptyset(u)(C) = C^u, \quad \text{on a alors } (C^u)^v = C^{uv} .$$

En particulier, pour tout $S \in Ob(E)$, le foncteur source

$$s_S : E_{/S} \to E , \quad (x : X \to S) \rightsquigarrow X,$$

induit sur les cribles une application

(6.4) $$\emptyset(E) \to \emptyset(E_{/S})$$

qui, pour simplifier, sera notée $C \rightsquigarrow C^S$.

Pour toute flèche $f : T \to S$, de E, le foncteur

$$E_{/f} : E_{/T} \to E_{/S} , \quad (v : V \to T) \rightsquigarrow (fv : V \to S)$$

Induit une application sur les cribles :

(6.5) $$\begin{aligned} \emptyset(E_{/S}) &\to \emptyset(E_{/T}) \\ C &\rightsquigarrow C^f . \end{aligned}$$

Puisque l'on a $s_S \cdot E_{/f} = s_T$, il est clair que, pour tout crible C de E, on a :

(6.6) $$(C^S)^f = C^T .$$

Lemme 6.9. Pour toute catégorie E, les applications (6.4) font de $\emptyset(E)$ la limite projective du foncteur :

$$\begin{aligned} \emptyset : E^o &\to (\text{Ens}) \\ S &\rightsquigarrow \emptyset(E_{/S}) \end{aligned}$$

En effet, si C est un crible de E, il est clair que $Ob(C)$ est l'ensemble des $S \in Ob(E)$ tels que $C^S = E_{/S}$. Inversement, étant donné des $C_S \in \emptyset(E_{/S})$ tels que, pour tout $f : T \to S$, on ait $(C_S)^f = C^T$, posons $C = \{ S \in Ob(E) \mid C_S = E_{/S} \}$. Il est clair que C est l'ensemble d'objets d'un crible C de E. Nous devons prouver que, pour tout $S \in Ob(E)$, on a $C^S = C_S$. Or, par construction,
$Ob(C^S) = \{ f : T \to S, \ f \in Ob(E_{/S}) \mid T \in Ob(C) \}$; donc $Ob(C^S)$ est l'ensemble des f tels que $C_T = E_{/T}$. Or $C_T = C_S{}^f$, **d'où la conclusion.**

Encore une convention. Soit $u : E \to E'$ un foncteur. Pour tout $X \in Ob(E)$, soit $X' = u(X)$ et soit $u_{/X} : E_{/X} \to E'_{/X'}$ le foncteur induit par u, cf. (6.1). Il induit une application sur les cribles :

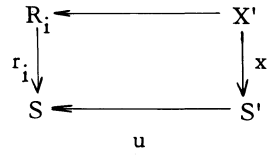
(6.7) $$\emptyset(E'_{/X'}) \to \emptyset(E_{/X}),$$

notée $C' \to C'^{u}$
malgré les risques de confusion.

Exemple 6.10. (crible engendré par une famille d'objets).

Soient $\boldsymbol{E}$ une catégorie, S un objet de $\boldsymbol{E}$ et $\mathbb{R} = (r_i : R_i \to S)_{i\in I}$ une famille de flèches de $\boldsymbol{E}$ de même but S. C'est aussi une famille d'objets de $\boldsymbol{E}_{/S}$. **Soit C le crible de $\boldsymbol{E}_{/S}$ dont les objets sont les** $x : X \to S$ **qui dominent un des** $r_i : R_i \to S$,
i.e. $Ob(\boldsymbol{C}) = \{ x : X \to S \mid$ il existe $i\in I$, $Hom_S(X,R_i) \neq \emptyset \}$. **On l'appellera le crible** (sous-entendu: de $\boldsymbol{E}_{/S}$) **engendré par** $\mathbb{R}$. Bien entendu, deux familles de flèches de même but peuvent définir le même crible. On dit alors qu'elles sont **équivalentes.** Si $\mathbb{R}' = (r'_j : R'_j \to S)_{j\in J}$ est une autre famille, pour que le crible engendré par $\mathbb{R}'$ soit contenu dans celui qu'engendre $\mathbb{R}$, il faut et il suffit que, pour tout $j\in J$, il existe $i\in I$ tel que $Hom_S(R'_j, R_i) \neq \emptyset$. On dit alors que $\mathbb{R}'$ raffine $\mathbb{R}$.

Si $u : S' \to S$ est une flèche de $\boldsymbol{E}$ et si $\mathbb{R} = (r_i : R_i \to S)_{i\in I}$ est une famille d'objets de $\boldsymbol{E}_{/S}$, l'image inverse par u du crible $\boldsymbol{C}$ engendré par $\mathbb{R}$, soit $\boldsymbol{C}^u$, (6.5), a pour objets les $x' : X' \to S$ tels qu'il existe $i\in I$ et un carré commutatif :



Si le produit fibré $R'_i = R_i \times_S S'$ existe pour tout $i\in I$, le crible image inverse $\boldsymbol{C}^u$, (6.5), est engendré par la famille des deuxièmes projections $(r'_i : R'_i \times_S S' \to S')_{i\in I}$, que l'on appelle "**famille déduite de** $\mathbb{R}$ **par le changement de base** u". Si, pour tout $u : S' \to S$, et tout $i\in I$, le produit fibré $R_i \times_S S'$ existe, on dira que **la famille** $\mathbb{R}$ **est quarrable.**

6 - b) Cribles et familles de $\boldsymbol{F}$*-descente.*

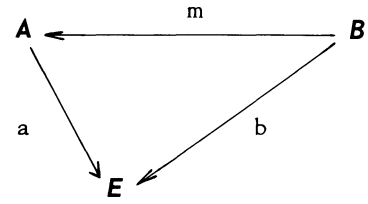
Soit $\varphi : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$ un foncteur. Pour toute catégorie au dessus de $\boldsymbol{E}$, $u : \boldsymbol{E}' \to \boldsymbol{E}$, on a défini dans (1.23) la catégorie

(6.8) $\boldsymbol{Hom}_{\boldsymbol{E}/}\hat{}(\boldsymbol{E}',\boldsymbol{F})$ que l'on notera $\mathbb{H}(\boldsymbol{E}',\boldsymbol{F})$,

et dont on rappelle que les objets sont les $\boldsymbol{E}$-foncteurs qui transforment toute flèche de $\boldsymbol{E}'$ en une flèche $\boldsymbol{E}$-cartésienne de $\boldsymbol{F}$, les morphismes étant les $\boldsymbol{E}$-morphismes de foncteurs. D'après le sorite de fonctorialité

de 6.8, cf. (5.18) et alentour, on sait que, pour toute flèche m de $(Cat)_{/E}$ c'est à dire pour tout triangle commutatif dans (Cat)

(6.9)



,

on a un foncteur, induit par la composition avec m :

(6.10) $$\mathbb{H}(m,F) : \mathbb{H}(A,F) \to \mathbb{H}(B',F),$$

qui s'interprète également comme le foncteur restriction

(6.10 bis) $$\underset{\leftarrow}{Lim}(F \times_A A/A) \to \underset{\leftarrow}{Lim}(F \times_B B/B) .$$

En résumé, on a un foncteur

(6.11) $$\mathbb{H}(*,F) : ((Cat)_{/E})^o \to (Cat) ,$$

qui a tout objet a : $A \to E$ de $(Cat)_{/E}$ ("changement de la base E") associe $\mathbb{H}(A,F) \approx \underset{\leftarrow}{Lim}(F \times_A A/A)$.

Un diagramme tel que (6.9) doit être considéré comme un morphisme entre les changements de base a et b. Le foncteur $\mathbb{H}(m,F)$ permet de comparer l'effet des changements de base a et b sur les catégories $\underset{\leftarrow}{Lim}$. Cette comparaison, pour des changements de base **discrets**, est l'objet de **la théorie de la descente.** C'est du moins de ce point de vue abstrait que nous en aborderons l'étude, une version plus intuitive et plus commode pour les applications étant fournie au n° 9.

Définition 6.11. Soient u un foncteur et i un entier, $0 \leqslant i \leqslant 2$. On dira que u est i-fidèle si :

- u est fidèle, $i = 0$,
- u est pleinement fidèle, $i = 1$,
- u est une équivalence de catégories, $i = 2$.

Définition 6.12. Soit $\varphi : F \to E$ un foncteur et soit m une flèche de $(Cat)_{/E}$ telle que (6.9). Soit i un entier parmi 0,1 et 2. On dira que m est F-i-fidèle si le foncteur $\mathbb{H}(m,F)$ de (6.10) et (6.10 bis) est i-fidèle.

Sous les conditions de 6.12., on dira aussi (parabus de langage, car m n'est pas une flèche de $(Cat)_{/E}$) que m est un **foncteur** F-i-fidèle, L'introduction d'un entier i est commode pour dresser des tableaux de résultats. A cette fin, explicitons un résultat évident :

Lemme 6.13. Soient a,b et c trois foncteurs, tels que ab = c. Soit i un entier, $0 \leqslant i \leqslant 2$.

(i) si a et b sont i-fidèles, il en est de même de c,

(ii) si c est fidèle, il en est de même de b,

(iii) si c est pleinement fidèle et si a est fidèle, b est pleinement fidèle,

(iv) si c est une équivalence et si a est pleinement fidèle, a et b sont des équivalences.

D'où des conclusions évidentes pour les foncteurs F-i-fidèles.

Désormais les catégories que nous considérerons seront "au dessus de E" de manière évidente. Nous nous dispenserons parfois de préciser comment. Par exemple, une catégorie $E_{/S}$, $S \in Ob(E)$, sera toujours considérée comme une E-catégorie au moyen de son foncteur source :

$$E_{/S} \to E \quad , \quad (v : V \to S) \rightsquigarrow V. \tag{6.12}$$

Définition 6.14. (Cribles de Descente). Soit φ: $F \to E$ un foncteur et soit C un crible de E (resp. et soit C un crible de $E_{/S}$, $S \in Ob(E)$). On dira que C est un crible de F-i-descente, $0 \leqslant i \leqslant 2$, si la flèche de $(Cat)_{/E}$

$$\begin{array}{ccc} E & \xleftarrow{u} & C \\ {\scriptstyle id_E}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle u} & \\ E & & \end{array} \qquad \text{(resp.} \qquad \begin{array}{ccc} E_{/S} & \xleftarrow{u} & C \\ {\scriptstyle s}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle su} & \\ E & & \end{array}$$

est F-i-fidèle, où u désigne le foncteur d'inclusion et où $s : E_{/S} \to E$ est le foncteur source de (1.28).

Dire qu'un crible C de E est de F-i-descente signifie donc que le foncteur restriction

$$\rho : \underset{\leftarrow}{Lim}\,(F/E) \to \underset{\leftarrow}{Lim}(F \times_E C/C)$$

est i-fidèle.

Soit $S \in Ob(E)$ et soit C un crible de $E_{/S}$, on a deux foncteurs

$$F_S \xleftarrow{v_S} \mathcal{S}F(S) \xrightarrow{\rho} \mathbb{H}(C,F) \approx \underset{\leftarrow}{Lim}\,(C \times_E F/C), \tag{6.13}$$

où $\mathcal{S}F(S)$ est mis pour $\mathbb{H}(E_{/S},F)$, cf. (5.19), où F_S désigne la catégorie fibre de F en S, où v_S est le foncteur valeur en S de (5.22) et où ρ est induit par l'inclusion de C dans $E_{/S}$. Si le foncteur φ est **fibrant**, le foncteur v_S est une équivalence; un crible de F-i-descente permet donc de

comparer la fibre $F_{/S}$ et la catégorie $\mathbb{H}(C,F)$, d'autant plus précisément que i est plus grand).

Définition 6.15. Soit $\varphi : F \to E$ un foncteur et soit $\mathbb{R} = (r_a : R_a \to S)_{a \in A}$, $r_a \in Fl(E)$ une famille de flèches de E de même but S. On dira que $\mathbb{R}$ est une famille de F-i-descente, $0 \leqslant i \leqslant 2$, si le crible de $E_{/S}$ engendré par $\mathbb{R}$, 6.10., est de F-i-descente.

Lorsque la famille $\mathbb{R}$ est réduite à un seul morphisme, $r : R \to S$, on dira que r est un morphisme de F-i-descente. On dit souvent F-descente au lieu de F-1-descente et F-descente effective au lieu de F-2-descente.

Notons qu'**un morphisme** $r : R \to S$ **qui admet une section** $s : S \to R$, $rs = id_S$, est de F-descente effective [universelle] pour toute E-catégorie F. En effet, le crible de $E_{/S}$ qu'il engendre est égal à $E_{/S}$.

Nous démontrerons plus tard, mais cela est bien facile dès maintenant, que, si φ est **fibrant,** pour que r soit un morphisme de F-0-descente il faut et il suffit que le foncteur image inverse $r^* : F_S \to F_R$ soit fidèle, condition qui ne dépend évidemment pas du choix du foncteur image inverse.

Nous allons maintenant démontrer le "**théorème de comparaison**" qui sera amélioré, dans 10.1. et 10.3..

Proposition 6.16. Soient F et G deux E-catégories **fibrées** et soit $\mu : F \to G$ un E-foncteur cartésien. Soit $S \in Ob(E)$ et soit C un crible de $E_{/S}$. Soit enfin i un entier, $0 \leqslant i \leqslant 2$. Supposons que C soit un crible de F-i-descente et, si $i \neq 0$, de G-(i-1)-descente. Supposons de plus que, pour tout objet $f : T \to S$ de C, le foncteur $\mu_T : F_T \to G_T$ induit par u sur les fibres de F et G en T soit i-fidèle.. Alors le foncteur μ_S induit par μ sur les fibres de F et G en S est i-fidèle et, de plus, C est un crible de G-i-descente.

Démonstration. On a un carré commutatif dans (Cat)

$$
\begin{array}{ccc}
 & s = \mathbb{H}(E_{/S}, \mu) & \\
\mathbb{H}(E_{/S}, F) & \longrightarrow & \mathbb{H}(E_{/S}, G) \\
\Big\downarrow f & & \Big\downarrow g \\
\mathbb{H}(C, F) & \longrightarrow & \mathbb{H}(C, G) \\
 & c = \mathbb{H}(C, \mu) &
\end{array}
\qquad (6.14)
$$

où f et g sont induits par la composition avec le foncteur d'inclusion de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{E}_{/S}$. Par définition, l'hypothèse sur $\mathbf{C}$ signifie que f est i-fidèle et que g est (i-1)-fidèle. Par ailleurs, désignons par μ' : $\mathbf{F'} \to \mathbf{G'}$ le $\mathbf{C}$-foncteur cartésien déduit de μ par le changement de base m : $\mathbf{C} \to \mathbf{E}$ où m est la restriction à $\mathbf{C}$ du foncteur source, (1.28). Il est clair que, pour tout objet X de $\mathbf{C}$, le foncteur μ' induit sur les catégories fibres en X un foncteur i-fidèle. Puisque μ' est un $\mathbf{C}$-foncteur **cartésien,** il en résulte que c est i-fidèle. Pour conclure, il nous reste à montrer que μ_S est i-fidèle si s l'est, puis à appliquer 6.13.. Or on a un carré commutatif

(6.15)
$$\begin{array}{ccc} & \mu_S & \\ F_S & \longrightarrow & G_S \\ {\scriptstyle v}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle v'} \\ \mathbb{H}(E_{/S}, F) & \xrightarrow[s]{} & \mathbb{H}(E_{/S}, G) \end{array}$$

où v et v' sont les foncteurs valeur en S, $(v(x) = x(id_S))$, qui sont des équivalences d'après 5.7.. Il en résulte que μ_S est i-fidèle si s l'est, et réciproquement.

Nous améliorerons le résultat ci dessus en trouvant des conditions suffisantes pour que c soit i-fidèle. Nous trouverons des variantes en faisant des hypothèses qui se traduiront par des propriétés de fidélité pour trois des foncteurs qui figurent dans (6.14) et en appliquant 6.13..

6 - C) Topologie de la $\mathbf{F}$*-descente universelle.*

Définition 6.17. Soit $\varphi : \mathbf{F} \to \mathbf{E}$ un foncteur et soit $\mathbf{A} \overset{m}{\leftarrow} \mathbf{B}$, $a \searrow \swarrow b$, $\mathbf{E}$

une flèche de $(\mathrm{Cat})_{/\mathbf{E}}$. On dit que celle-ci est **universellement** $\mathbf{F}$-i-fidèle, $0 \leqslant i \leqslant 2$, si, pour tout foncteur **discret** u : $\mathbf{A'} \to \mathbf{A}$, le foncteur $\mathbb{H}(m', \mathbf{F}) : \mathbb{H}(\mathbf{A'}, \mathbf{F}) \to \mathbb{H}(\mathbf{B'}, \mathbf{F})$, induit par la première projection $m' : \mathbf{B'} = \mathbf{A'} \times_{\mathbf{A}} \mathbf{B} \to \mathbf{A'}$, est i-fidèle.

Par abus de langage, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur a, on dira également que **le foncteur** m est universellement $\mathbf{F}$-i-fidèle. On notera qu'il est alors $\mathbf{F}$-i-fidèle, car un foncteur identique est discret.

Lemme 6.18. Soit $\varphi : \mathbf{F} \to \mathbf{E}$ un foncteur et soit $\mathbf{A} \overset{m}{\leftarrow} \mathbf{B}$, $a \searrow \swarrow b$, $\mathbf{E}$

une flèche de $(Cat)_{/E}$. Pour qu'elle soit universellement F-i-fidèle, $0 \leqslant i \leqslant 2$, il faut et il suffit que, pour tout $S \in Ob(A)$, le foncteur $H(m', F)$ induit par la composition avec la première projection $m' : (A_{/S}) \times_A B \to A_{/S}$, soit i-fidèle.

Bien entendu le foncteur $A_{/S} \to A$ sous-entendu dans cet énoncé est **le foncteur source.** Nous savons qu'il est discret. La condition est donc nécessaire. Pour prouver qu'elle est suffisante, on peut évidemment supposer que $E = A$ et que a est le foncteur identique de A. La condition est alors stable par changement de base discret, en vertu de 6.1.. Pour prouver qu'elle est suffisante, il suffit donc de montrer qu'elle entraîne que $H(m, F)$ est i-fidèle. Pour tout $S \in Ob(A)$, on a un carré commutatif dans (Cat) :

(6.16)
$$\begin{array}{ccc} H(B,F) & \longrightarrow & H(B_S,F) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H(A,F) & \longrightarrow & H(A_{/S},F) \end{array}$$
$H(m,F)$ à gauche, μ_S à droite

induit par

$$\begin{array}{ccc} B & \longleftarrow & B_S \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longleftarrow & A_{/S} \end{array} ,$$

où $B_S = (A_{/S}) \times_A B$. Pour toute flèche $f : T \to S$ de E le foncteur $A_{/f} : A_{/T} \to A_{/S}$ de (1.29) définit un foncteur $H(B_S, F) \to H(B_T, F)$ et, d'après (1.31), un système projectif $K : A^o \to (Cat)$, $K(S) = H(B_S, F)$. On a de même un système projectif $\mathcal{S}F : A^o \to (Cat)$, $\mathcal{S}F(S) = H(A_{/S}, F)$ qui est celui que l'on a étudié dans 5.c).. En vertu de la commutativité de (1.30), le carré de (6.16) induit, à la limite, un carré

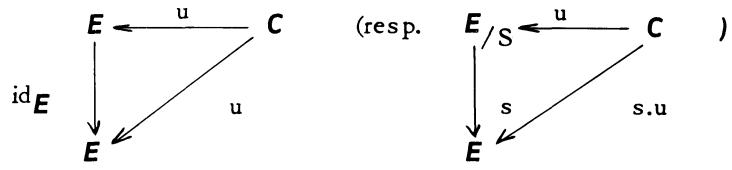
$$\begin{array}{ccc} H(B,F) & \xrightarrow{b} & \varprojlim K \\ H(m,F) \uparrow & & \uparrow \mu \\ H(A,F) & \xrightarrow[a]{} & \varprojlim \mathcal{S}F \end{array}$$

D'après 1.12., nous savons que a et b sont des isomorphismes. De plus, par hypothèse, pour tout $S \in Ob(E)$, le foncteur μ_S de (6.16) est i-fidèle. Le foncteur μ est donc i-fidèle, en vertu de 5.11..

C.Q.F.D.

Définition 6.19. Soit $\varphi : F \to E$ un foncteur et soit C un crible de E (resp. et soient S un objet de E et C un crible de $E_{/S}$). On dira que C

est un crible de $\boldsymbol{F}$-i-descente, **universelle**, $0 \leqslant i \leqslant 2$, si la flèche de $(\mathrm{Cat})_{/\boldsymbol{E}}$



où u désigne le foncteur d'inclusion de $\boldsymbol{C}$ dans $\boldsymbol{E}$ (resp. dans $\boldsymbol{E}_{/S}$) et où s est le foncteur source, est universellement $\boldsymbol{F}$-i-fidèle.

Corollaire 6.20. Soit $\varphi : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$ un foncteur

(i) pour qu'un crible $\boldsymbol{C}$ de $\boldsymbol{E}$ soit de $\boldsymbol{F}$-i-descente universelle, $0 \leqslant i \leqslant 2$, il faut et il suffit que, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{E})$, le crible $\boldsymbol{C}^S$, cf.(6.4), soit de $\boldsymbol{F}$-i-descente.

(ii) soit $S \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{E})$. Pour qu'un crible $\boldsymbol{C}$ de $\boldsymbol{E}_{/S}$ soit de $\boldsymbol{F}$-i-descente universelle, il faut et il suffit que, pour toute flèche $f : T \to S$ de $\boldsymbol{E}$, le crible $\boldsymbol{C}^f$, cf. (6.5), soit de $\boldsymbol{F}$-i-descente.

Définition 6.21. Soit $\varphi : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$ un foncteur et soit $\mathbb{R} = (r_a : R_a \to S)_{a \in \mathbb{A}}$, $r_a \in \mathrm{Fl}(\boldsymbol{E})$, une famille de flèches de $\boldsymbol{E}$ de même but S. On dira que $\mathbb{R}$ est une famille de $\boldsymbol{F}$-i-descente universelle s'il en est ainsi du crible de $\boldsymbol{E}_{/S}$ qu'elle engendre.

Remarque 6.22. Sous les conditions de 6.21., si la famille $\mathbb{R}$ est quarrable et si $\boldsymbol{C}$ désigne le crible de $\boldsymbol{E}_{/S}$ qu'elle engendre, pour toute flèche $f : T \to S$ de $\boldsymbol{E}$ le crible $\boldsymbol{C}^f$ est engendré par la famille $\mathbb{R}^f$ déduite de $\mathbb{R}$ par le changement de base f, cf. 6.10.. Par suite, pour que $\mathbb{R}$ soit une famille de $\boldsymbol{F}$-i-descente universelle, il faut et il suffit que, pour toute flèche $f : T \to S$ de $\boldsymbol{E}$, la famille $\mathbb{R}^f$ déduite de $\mathbb{R}$ par le changement de base f soit de $\boldsymbol{F}$-i-descente.

Théorème 6.23. Soit $\varphi : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$ un foncteur et soit i un entier parmi 0,1 et 2. Pour tout $S \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{E})$, désignons par $J_i(S)$ l'ensemble des cribles de $\boldsymbol{E}_{/S}$ qui sont de $\boldsymbol{F}$-i-descente **universelle.** Pour toute flèche $f : T \to S$ de $\boldsymbol{E}$, et tout $\boldsymbol{C} \in J_i(S)$, on a $\boldsymbol{C}^f \in J_i(T)$. Les $J_i(S)$, $S \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{E})$, définissent une **topologie** sur $\boldsymbol{E}$, cf [AF].

On appelle cette dernière " **topologie de la $\boldsymbol{F}$-i-descente** ".

La première assertion de 6.23. résulte évidemment du fait que $E_{/f} : E_{/T} \to E_{/S}$ est discret. Par définition, le seconde signifie que les conditions (i) et (ii) du lemme ci dessous sont vérifiées pour tout $S \in Ob(E)$.

Lemme 6.24. Sous les hypothèses et avec les notations de 6.23. soit un objet de E.

(i) Pour qu'un crible C et $E_{/S}$ appartienne à $J_i(S)$ il suffit qu'il existe $R \in J_i(S)$ tel que, pour tout $f \in Ob(R)$, $f : T \to S$, C^f appartienne à $J_i(T)$.

(ii) Un crible C de $E_{/S}$ qui contient un $R \in J_i(S)$ appartient à $J_i(S)$.

(iii) Si R et R' appartiennent à $J_i(S)$, il en est de même de $R \cap R'$.

Preuve. On notera que (iii) est conséquence du fait que les $J_i(S)$ définissent une topologie sur E.

Pour prouver (i), considérons le diagramme

(6.17)
$$\begin{array}{ccc} & \overset{i'}{\longleftarrow} & \\ C & & C \cap R = C' \\ {\scriptstyle j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j'} \\ E_{/S} & \underset{i}{\longleftarrow} & R \end{array}$$

où toutes les flèches sont les foncteurs d'inclusion que l'on considère comme des flèches de $(Cat)_{/E}$ au moyen du foncteur source $E_{/S} \to E$. Pour tout objet $f : T \to S$ de R, on a $C^f = C'^f$, ce qui montre, d'après 6.20.(ii), que le foncteur j' est universellement F-i-fidèle. Le foncteur i est supposé universellement F-i-fidèle, il en est donc de même de i', car j est discret. Il résulte trivialement de la définition 6.17. que j est universellement F-i-fidèle, d'où (i), par définition.

Pour prouver (ii), on reprend le diagramme (6.17), Puisque $C \supset R$, on a $C' = R$, donc j' est l'identité. Pour la même raison que plus haut, on sait que i et i' sont universellement F-i-fidèles, d'où la conclusion.

C.Q.F.D.

Traduisons le théorème précédent en termes de familles ou de morphismes de descente. Les produits fibrés ne sont utilisés que pour la commodité de l'exposé.

Proposition 6.25. Soit $\varphi : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$ un foncteur.

(i) soit $\mathbb{R} = (r_a : R_a \to S)_{a\in A}$, $r_a \in Fl(\boldsymbol{E})$, une famille de $\boldsymbol{F}$-i-descente universelle. Pour qu'un morphisme $c : C \to S$ soit de $\boldsymbol{F}$-i-descente universelle, il faut et il suffit qu'il le devienne après les changements de base $r_a, a\in A$, c'est à dire que, pour tout $a\in A$, la première projection $R_a \times_S C \to R_a$ soit un morphisme de $\boldsymbol{F}$-i-descente universelle.

(ii) un morphisme f de $\boldsymbol{E}$, dominé par un morphisme de $\boldsymbol{F}$-i-descente universelle h (i.e. tel qu'il existe g avec fg = h) est de $\boldsymbol{F}$-i-descente universelle.

(iii) Le composé de deux morphismes de $\boldsymbol{F}$-i-descente universelle en est un.

Preuve. (i) et (ii) ne font que traduire 6.24.(i) et (ii). Soient f et g deux morphismes de $\boldsymbol{F}$-i-descente universelle, fg = h. Pour prouver (iii) simplement, introduisons le produit fibré $T \xleftarrow{h'} T \times_S U = V$. Il existe

$$\begin{array}{ccc} T & \xleftarrow{h'} & T\times_S U = V \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ S & \xleftarrow[h]{} & U \end{array}$$

une section $s : U \to V$, caractérisée par $f' s = id_U$ et $h' s = g$. Donc g domine h', donc h' est un morphisme de $\boldsymbol{F}$-i-descente universelle d'après (ii). Donc aussi h, d'après (i), puisque f l'est et que le carré ci dessus est cartésien. [Exercice : ne pas utiliser $T \times_S U$ et raisonner sur les cribles].

En termes de familles, l'énoncé 6.25.(iii) prend la forme suivante :

Corollaire 6.26. Soit $\varphi : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$ un foncteur et soit $\mathbb{R} = (r_a : R_a \to S)_{a\in A}$, $r_a \in Fl(\boldsymbol{E})$, une famille de $\boldsymbol{F}$-i-descente universelle. Soit, pour tout $a\in A$, $\mathbb{R}_a = (r_{a,b} : R_{a,b} \to R_a)_{b\in B_a}$, $r_{a,b} \in Fl(\boldsymbol{E})$, une famille de $\boldsymbol{F}$-i-descente universelle. La " famille composée " $\mathbb{R}'' = (r_a . r_{a,b} : R_{a,b} \to S)_{a\in A,\, b\in B_a}$ est de $\boldsymbol{F}$-i-descente universelle.

L'énoncé précédent (ainsi que 6.25.) devient incorrect si l'on ôte l'adjectif " universelle ". On a cependant un résultat plus fin que 6.26..

Corollaire 6.27. Avec les notations du corollaire précédent,

(i) si $\mathbb{R}$ est une famille de $\boldsymbol{F}$-i-descente et si, pour tout $a\in A$, $\mathbb{R}_a$ est une famille de $\boldsymbol{F}$-i-descente **universelle**, $\mathbb{R}''$ est une famille de $\boldsymbol{F}$-i-descente,

(ii) si $\mathbb{R}''$ est une famille de ***F***-i-descente et si, pour tout $a \in A$, $\mathbb{R}_a$ est une famille de ***F***-(i-1)-descente **universelle,** $\mathbb{R}$ est une famille de ***F***-i-descente.

Pour obtenir un énoncé court, on a convenu que ***F***-(-1)-descente signifie que l'on ne fait pas d'hypothèse sur $\mathbb{R}_a$.

Soit ***R*** (resp. ***R''***) le crible de $\boldsymbol{E}_{/S}$ engendré par $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{R}''$). Il nous suffit évidemment de montrer que l'inclusion $\boldsymbol{R}'' \to \boldsymbol{R}$ est un foncteur ***F***-i-fidèle pourvu que, pour tout $a \in A$, la famille $\mathbb{R}_a$ soit de ***F***-i-descente universelle. Moyennant quelques traductions évidentes, ceci résulte du lemme suivant.

Lemme 6.28. Sous les hypothèses de 6.18., soit encore $(S_j)_{j \in J}$, $S_j \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{A})$, une famille qui engendre ***A*** comme crible. Pour que m soit universellement ***F***-i-fidèle il faut et il suffit que, pour tout $j \in J$, le foncteur $\mathbb{H}(m_j, \boldsymbol{F})$ induit par composition avec la première projection $m_j : (\boldsymbol{A}_{/S_j}) \times_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{A}_{/S_j}$ soit **universellement** ***F***-i-fidèle.

La condition est nécessaire, par définition, car un foncteur source est discret. Elle est suffisante. En effet, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{A})$ il existe $j \in J$ tel que $\mathrm{Hom}(S, S_J)$ soit non vide. Soit un tel j et soit $m \in \mathrm{Hom}(S, S_j)$. D'après 6.5., Le foncteur $\boldsymbol{A}_{/m} : \boldsymbol{A}_{/S} \to \boldsymbol{A}_{/S_j}$ est **discret** car on a $\sigma_j . \boldsymbol{A}_{/m} = \sigma$, où σ_j (resp. σ) désigne le foncteur source relatif à S_j (resp. S), cf. (1.28). Par hypothèse, le foncteur déduit de m par le changement de base σ_j est universellement ***F***-i-fidèle donc aussi, par transitivité du changement de base, celui que l'on déduit de m par le changement de base σ, car $\boldsymbol{A}_{/m}$ est discret. D'où la conclusion, par 6.18..

7. Sections cartésiennes et catégories simpliciales.

Dans ce numéro, nous élaborons les techniques nécessaires pour traduire les définitions du numéro 6 en termes d'objets munis d'une donnée de descente. Il s'agit essentiellement du calcul de la catégorie $\underleftarrow{Lim}(F \times_E C/C)$ qui intervient dans (6.13). La plupart de nos énoncés ultérieurs affirment qu'un certain foncteur est i-fidèle, cf. 6.11.. Pour i = 0 et i = 1, les démonstrations sont triviales.. Nous développons au paragraphe a) un sorite qui permet qu'elles soient courtes.. Pour i = 2, afin d'éviter des calculs, nous procédons comme suit. Les résultats du numéro 5 permettent de supposer que F est munie d'un **scindage.** On utilise alors les calculs du paragraphe 7-b) et, éventuellement, ceux de 7-c).

Le paragraphe 7-c) fournit un procédé de calcul de $\underleftarrow{Lim}(F/E)$, cf. 7.10. et 7.11., que l'on ne peut utiliser en théorie de la descente que pour l'étude d'une famille réduite à un seul morphisme.

Nous étudions au paragraphe 7-d) les catégories $Fam(E)$, qui fournissent un artifice suffisament "fonctoriel" pour permettre d'étendre trivialement aux familles les énoncés que nous donnerons généralement pour les seuls morphismes, cf. 7.25. et 9.18.. Par la même occasion, nous obtenons un procédé de calcul de $\underleftarrow{Lim}(F/E)$ qui ne suppose plus que l'existence, dans E, de certains produits fibrés (7.26. et 7.27.) et qui généralise convenablement 7.10 et 7.11..

7 - *a) Le sorite du* **Hom** *de deux sections cartésiennes.*

Soit $\varphi : F \to E$ une E-catégorie et soit $a : E' \to E$ un foncteur ("changement de base"). Soient s et t deux objets de la catégorie $Hom_{E/}\hat{}(E',F)$ de (1.23), (que l'on peut interpréter comme deux sections cartésiennes de $F' = F \times_E E'$ au dessus de E'). Dans le cas où $E' = E$, nous avons défini dans (5.27) un foncteur

(7.1) $$Hom(s,t) : E^{o} \to (Ens).$$

Recopions cette construction. Pour tout $S' \in Ob(E')$, posons $S = a(S')$ et

(7.2) $$Hom(s.t)\,(S') = Hom_S(s(S'), t(S')).$$

Pour toute flèche $f' : T' \to S'$ de E', dont l'image par a est notée $f : T \to S$, on a une application

(7.3) $$Hom(s,t)\,(f') : Hom(s,t)(S') \to Hom(s,t)\,(T'),$$

qui, à tout $x \in \mathbf{Hom}(s,t)(S')$ associe l'élément $x^{f'}$ de $\mathbf{Hom}(s,t)(T')$ caractérisé, grâce au fait que $t(f')$ est $\mathbf{E}$-cartésien, par la commutativité du diagramme

(7.4)

$$\begin{array}{ccc} & s(f') & \\ s(S') & \longleftarrow & s(T') \\ x \downarrow & & \downarrow x^{f'} \\ t(S') & \longleftarrow & t(T') \\ & t(f') & \end{array}$$

Pour tout $S' \in \mathrm{Ob}(\mathbf{E}')$, on a une application

(7.5) $\qquad \mathrm{Hom}(s,t) \to \mathbf{Hom}(s,t)(S'),\ u \rightsquigarrow u(S'),$

car un élément de $\mathrm{Hom}(s,t)$ est un morphisme de foncteurs qui, " composé avec φ " donne le morphisme identique du foncteur a. Les applications (7.5) vérifient les conditions de compatibilité nécessaires pour définir une application

(7.6) $\qquad \mathrm{Hom}(s,t) \to \varprojlim \mathbf{Hom}(s,t),$

qui est évidemment **bijective.**

On a des accouplements

(7.7) $\qquad \mathbf{Hom}(s,t) \times \mathbf{Hom}(t,u) \to \mathbf{Hom}(s,u)$

induits, pour tout $S' \in \mathrm{Ob}(\mathbf{E}')$, par la loi de composition de la catégorie fibre $\mathbf{F}_S$ de φ en $S = a(S')$, et qui, par passage à la limite projective, redonnent, modulo (7.6), la loi de composition des flèches dans la catégorie $\mathbf{Hom}_{\mathbf{E}/}\hat{}(\mathbf{E}', \mathbf{F})$.

Introduisons le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} & a' & \\ \mathbf{F} & \longleftarrow & \mathbf{F}' \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi' \\ \mathbf{E} & \longleftarrow & \mathbf{E}' \\ & a & \end{array} \quad ,$$

A tout couple $(s.t)$ d'objets de la catégorie $\mathbf{Hom}_{\mathbf{E}/}\hat{}(\mathbf{E}', \mathbf{F})$, est associé un couple (s',t') de sections cartésiennes de φ', caractérisé par

(7.8) $\qquad s = a's' \qquad \text{et} \qquad t = a't'.$

Il existe un morphisme de foncteurs, induit par le foncteur a',

(7.9) $\qquad \mathbf{Hom}(s',t') \rightarrow \mathbf{Hom}(s,t)$,

qui est évidemment **un isomorphisme.**

Si $b : E'' \rightarrow E'$ est un foncteur composable avec a, il induit un foncteur :

(7.10) $\qquad \mathbf{Hom}_{E/.}\hat{}(b,F) : \Big[\mathbf{Hom}_{E/.}\hat{}(E',F) \rightarrow \mathbf{Hom}_{E/.}\hat{}(E'',F)$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad s \rightsquigarrow sb$

Si s et t sont deux E-foncteurs cartésiens de E' dans F, on a évidemment l'égalité :

(7.11) $\qquad \mathbf{Hom}(s,t).b = \mathbf{Hom}(sb,tb)$.

Remarque 7.1. Si b est le foncteur d'inclusion d'un crible C d'une catégorie $E_{/S}$, $S \in Ob(E)$, pour qu'il soit F-i-fidèle, $0 \leqslant i \leqslant 1$, il faut et il suffit que, pour tout couple (s,t) de E-foncteurs cartésiens de $E_{/S}$ dans F, i.e. tout couple d'objets de $\mathcal{S}F(S)$, (5.19), l'application

(7.12) $\qquad \mathrm{Hom}(s,t) \rightarrow \varprojlim(\mathbf{Hom}(s,t) \mid C)$

soit injective ou bijective, selon que i = 0 ou 1.

Supposons que E soit munie d'une topologie J, [AS], pour que tout raffinement de J soit un crible de F-1-descente, il faut et il suffit que, pour tout $S \in Ob(E)$ et tout couple (s,t) d'objets de $\mathcal{S}F(S)$, le foncteur $\mathbf{Hom}(s,t) : (E_{/S})^{o} \rightarrow (\mathrm{Ens})$ soit **un faisceau d'ensembles** sur $E_{/S}$ pour la topologie induite par celle de E. L'ensemble des raffinements étant stable par changement de base, on en déduit qu'ils seront même des cribles de F-1-descente **universelle** : J sera moins fine que la topologie de la F-1-descente, 6.23..

Soient F et G deux E-catégories et soit $u : F \rightarrow G$ un E-foncteur **cartésien**. Par composition avec u, on a un foncteur

(7.13) $\qquad \mathbf{Hom}_{E/.}\hat{}(E',u) : \Big[\mathbf{Hom}_{E/.}\hat{}(E',F) \rightarrow \mathbf{Hom}_{E/.}\hat{}(E',G),$

et, pour tout couple (s,t) d'objets de $\mathbf{Hom}_{E/.}\hat{}(E',F)$, on a un morphisme de foncteurs (ou de préfaisceaux d'ensembles si l'on préfère)

(7.14) $\qquad \mathbf{Hom}(u) : \mathbf{Hom}(s,t) \rightarrow \mathbf{Hom}(us,ut),$

induit par u et qui, par passage à la limite projective, redonne l'action de (7.13) sur les flèches, modulo les bijections de (7.6).

Si $b : E'' \rightarrow E'$ désigne à nouveau un foncteur composable avec a, la restriction à E'' du morphisme de foncteurs (7.14) est le morphisme

(7.15) $\quad \boldsymbol{Hom}(u) : \boldsymbol{Hom}(sb,tb) \rightarrow \boldsymbol{Hom}(usb,utb).$

7 - b) Sections cartésiennes d'une catégorie scindée et systèmes transitifs d'isomorphismes.

Soit $\varphi : \boldsymbol{F} \rightarrow \boldsymbol{E}$ une catégorie **scindée.** Pour toute flèche $f: T \rightarrow S$ de $\boldsymbol{E}$, le scindage définit un foncteur image inverse que nous noterons $f^*: \boldsymbol{F}_S \rightarrow \boldsymbol{F}_T$, conformément aux notations introduites à la fin du scholie 1.6.. Pour tout objet (resp. toute flèche) x de $\boldsymbol{F}_S$, nous poserons $x^f = f^*(x)$.

Soit R un objet de $\boldsymbol{E}$ tel que, pour tout $S \in Ob(\boldsymbol{E})$, l'ensemble $\boldsymbol{Hom}(S,R)$ soit non vide. Soit enfin $\xi : \boldsymbol{E} \rightarrow \boldsymbol{F}$ une **section cartésienne** de φ. D'après (1.15), elle détermine, pour toute flèche $f: S \rightarrow R$ de $\boldsymbol{E}$, un S-isomorphisme

(7.16) $\quad u_f : \xi(S) \rightarrow x^f \quad , \quad x = \xi(R) ,$

caractérisé par

(7.17) $\quad x_f.u_f = \xi(f) \qquad$ où $\qquad x_f : x^f \rightarrow x$

est le morphisme de transport de but x et de projection f cf. 1.5. Pour tout $S \in Ob(\boldsymbol{E})$ et tout $(f,g) \in Hom(S,R)^2$, on a ainsi un S-isomorphisme

(7.18) $\quad u_{f,g} = u_f(u_g)^{-1} \quad , \quad u_{f,g} : x^g \rightarrow x^f.$

Pour S fixé, les $u_{f,g}$ forment évidemment un système transitif d'isomorphismes entre les images inverses de x par les morphismes de S dans R:

(7.19) $\quad u_{f,g}.u_{g,h} = u_{f,h} \quad , \quad (f,g,h) \in Hom(S,R)^3 .$

De plus, les $u_{f,g}$ sont transportables, i.e., pour tout diagramme de $\boldsymbol{E}$ $R \overset{f}{\underset{g}{\leftleftarrows}} S \overset{h}{\leftarrow} T$, on a

(7.20) $\quad u_{fh,gh} = (u_{f,g})h .$

En effet, d'après (1.17), on a $u_{fh} = u_f^h.u_h$ et $u_{gh} = u_g^h.u_h$.

Pour tout objet x de $\boldsymbol{F}_R$, on appellera "système d'isomorphismes entre les images inverses de x" la donnée, pour tout $S \in Ob(\boldsymbol{E})$, d'une famille de S-isomorphismes

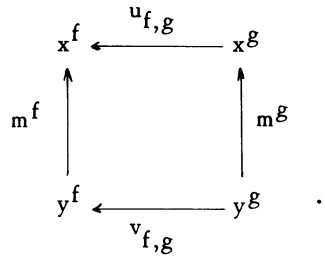
(7.21) $\quad u_{f,g} : x^g \rightarrow x^f \quad , \quad (f,g) \in Hom(S,R)^2.$

On dira qu'un tel système est **transportable** (resp. **transitif**) si la relation (7.20) (resp. (7.19)) est vérifiée chaque fois que cela a un sens.

Etant donnés deux objets x et y de $\boldsymbol{F}_R$ et deux systèmes d'isomorphismes U et V entre les images inverses de x et de y respectivement,

on dira qu'un R-morphisme $m : y \to x$ est **compatible** avec U et V si, pour tout $S \in Ob(\boldsymbol{E})$ et tout $(f.g) \in Hom(S, R)^2$, on a

(7.22) $$m^f.v_{f,g} = u_{f,g}.m^g$$



On définit alors de manière évidente **la catégorie**

(7.23) $$Tr(F/E,R)$$

des objets x de F_R munis d'un système transitif et transportable d'isomorphismes entre ses images inverses.

Désignons par

(7.24) $$\iota : \underleftarrow{Lim}(F/E) \to Tr(F/E,R)$$

le foncteur dont l'action sur les objets est définie par (7.16)à (7.18) et qui, à tout morphisme de sections cartésiennes $\mu : \eta \to \xi$, associe le R-morphisme $\mu(R) : \eta(R) \to \xi(R)$. (Ce dernier est **compatible** avec les systèmes d'isomorphismes entre les images inverses de $\xi(R)$ et de $\eta(R)$ définis respectivement par ξ et η : cf. (1.18)).

Proposition 7.2. Soit $\varphi : F \to E$ une E-catégorie **scindée.** Soit R un objet de E tel que, pour tout $S \in Ob(E)$, l'ensemble $Hom(S,R)$ soit non vide. Le foncteur ι de (7.24) est une équivalence de catégories. Il est surjectif sur les objets.

Démonstration. Montrons que ι est pleinement fidèle. Soient ξ et η deux sections cartésiennes de φ et soient (x,U) et (y,V) leurs images par ι . On a

(7.25) $$x = \xi(R) \quad \text{et} \quad y = \eta(R)$$

et, pour toute flèche de E de but R, notée $f : S \to R$, on a deux S-isomorphismes :

(7.26) $$u_f : \xi(S) \to x^f \quad \text{et} \quad v_f : \eta(S) \to y^f .$$

Soit $m : y \to x$ R-morphisme compatible avec U et V. Pour toute flèche de E de but R, posons

(7.27) $m_{S,f} = (u_f)^{-1}.m^f.v_f \quad , \quad m_{S,f} : t(S) \to s(S).$ cf (1.18).

En appliquant (7.22) à (x,U) et à(y,V), on voit que, pour tout $S \in Ob(\boldsymbol{E})$ et tout $(f,g) \in Hom(S,R)$, on a $m_{S,f} = m_{S,g}$. La valeur commune est notée m_S. On a $m_R = m$ car, si e est le morphisme identique de R, u_e est le morphisme identique de x d'après (1.17). Il reste donc à prouver que les $m_S, S \in Ob(\boldsymbol{E})$, vérifient, pour toute flèche $f : T \to S$ de $\boldsymbol{E}$, la relation (1.18), i.e. définissent un morphisme de sections cartésiennes $\mu : \eta \to \xi$. Par construction, la relation (1.18) est vérifiée lorsque le but de f est égal à R, cf. (7.27). S'il n'en n'est pas ainsi, on choisit un $s \in Hom(S,R)$ (cet ensemble est non vide par hypothèse). La relation (1.18) est vérifiée pour s et pour sf car leur but est R. Un petit calcul montre qu'elle l'est pour f.

Prouvons maintenant que ι est surjectif sur les objets.

Soit donc (x,U) un objet de $\boldsymbol{Tr}(\boldsymbol{F}/\boldsymbol{E},R)$. Pour tout $S \in Ob(\boldsymbol{E})$, choisissons un élément s de Hom(S,R); si S = R, on prend $s = r = id_R$. Choisissons également un x_S parmi les objets de $\boldsymbol{F}_S$ isomorphes aux $x^f, f \in Hom(S,R)$; si S = R, on prend $x_R = x$. Choisissons enfin un S-isomorphisme

(7.28) $$v_s : x_S \to x_R{}^s = x^s ;$$

si R = S, on prend $v_s = id_x$.

Il nous reste à construire, pour toute flèche $f : T \to S$ de $\boldsymbol{E}$ un $\boldsymbol{T}$-isomorphisme

(7.29) $$u_f : x_T \to x_S{}^f ,$$

de sorte que la relation (1.17) soit vérifiée.

Définissons u_f lorsque S = R. On a alors deux éléments t et f de Hom(T,R). On pose

(7.30) $$u_f = u_{f,t}.v_t .$$

En vertu de la transitivité des $u_{f,g}$, on a $u_t = v_t$.

Si $f : T \to S$ est une flèche de $\boldsymbol{E}$, on définit u_f par

(7.31) $$u_{sf} = u_s{}^f.u_f .$$

Si S = R, on retrouve la valeur donnée par (7.30), car $v_s = u_s$ est la flèche identique de x.

Il nous reste à vérifier la relation (1.17). Soient $U \xrightarrow{g} T \xrightarrow{f} S$ deux flèches composables de $\boldsymbol{E}$. Par construction, on a :

$$u_{fg} = (u_s{}^{fg})^{-1}.u_{sfg}$$

$$u_f{}^g = ((u_s{}^f)^{-1})^g.u_{sf\,g}$$

$$u_g = (u_t{}^g)^{-1}.u_{tg}$$

Nous devons donc prouver

$$u_{sfg} = u_{sf}{}^g.(u_t{}^g)^{-1}.u_{tg}$$

puisque sfg, sf, t et tg ont pour but R, on peut utiliser la relation (7.30). On doit donc prouver

$$u_{sfg,u^*v_u} = (u_{sf,t^*v_t})^g.(u_t{}^g)^{-1}.u_{tg,u^*v_u} \quad ,$$

ou encore, après simplification,

$$u_{sfg,u} = (u_{sf,t})^g.u_{tg,u^*}$$

D'après (7.20), cette dernière relation équivaut à

$$u_{sfg,u} = u_{sfg,tg}.u_{tg,u} \quad ,$$

laquelle résulte de la transitivité.

C.Q.F.D.

Lemme 7.3. Sous les hypothèses de la proposition précédente, soit $x \in Ob(\boldsymbol{F}_R)$ et soit U un système d'isomorphismes entre les images inverses de x, cf. (7.21). Soient encore y un objet de $\boldsymbol{F}_R$ et $m : y \to x$ un R-isomorphisme. Il existe un système d'isomorphismes entre les images inverses de y noté V et **caractérisé** par le fait que m est compatible avec U et V, cf. (7.22). Si U est transitif (resp. transportable) il en est de même de V.

L'existence et l'unicité résultent à l'évidence de la relation (7.22). La seconde assertion résulte d'un petit calcul.

Remarque 7.4. (Fonctorialité). La construction de $\boldsymbol{Tr(F/E,}R)$ est fonctorielle en $\boldsymbol{F}$. En effet, soit $\gamma : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{E}$ une $\boldsymbol{E}$-catégorie scindée et soit $\mu : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{G}$ un morphisme de catégories scindées c'est à dire un $\boldsymbol{E}$-foncteur qui transforme tout morphisme de transport en un morphisme de transport ("qui commute à la formation des images inverses"). Il définit évidemment un foncteur $\boldsymbol{Tr(\mu) : Tr(F/E,}R\boldsymbol{)} \to \boldsymbol{Tr(G/E,}R\boldsymbol{)}$: si (x,U) est un objet de $\boldsymbol{Tr(F/E,}R\boldsymbol{)}$, son image par $\boldsymbol{Tr}(\mu)$, notée (y, V) est définie par $y = \mu(x)$ et $v_{f,g} = \mu(u_{f,g})$ pour tout couple (f,g) de morphismes

de $\boldsymbol{E}$ de but $\boldsymbol{R}$ et de même source. De plus, corollaire indispensable de 7.2. le diagramme ci-dessous est commutatif.

(7.32)

$$\begin{array}{ccc} & \overleftarrow{Lim}(\mu) & \\ \overleftarrow{Lim}(F/E) & \longrightarrow & \overleftarrow{Lim}(G/E) \\ \downarrow \iota & & \downarrow \iota' \\ Tr(F/E,R) & \xrightarrow[Tr(\mu)]{} & Tr(G/E,R) \end{array}$$

où ι et ι' sont les équivalences de catégories de (7.24).

Remarque 7.5. Cette construction est également fonctorielle par rapport au couple $(\boldsymbol{E},R)$. Soit $a : \boldsymbol{E}' \to \boldsymbol{E}$ un foncteur et soit $R' \in Ob(\boldsymbol{E}')$ tel que $a(R') = R$ et tel que, pour tout $S' \in Ob(\boldsymbol{E}')$, l'ensemble $Hom(S', R')$ soit non vide. Désignons par $\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{F} \times_{\boldsymbol{E}} \boldsymbol{E}'$ la catégorie déduite de $\boldsymbol{F}$ par le changement de base a, **munie du scindage** déduit de celui de $\boldsymbol{F}$ par le procédé de 1.9.. On notera que la première projection de $\boldsymbol{F}'$ induit, pour tout $S' \in Ob(\boldsymbol{E}')$ un isomorphisme entre les catégories fibres en S' et en $S = a(S')$.

Définissons un foncteur

(7.33) $$Tr(F/E,a) : Tr(F/E,R) \to Tr(F'/E',R') .$$

Pour tout objet (x,U) de $Tr(F/E,R)$ désignons par x' l'objet de $F'_{R'}$ dont la première projection est x. Pour tout $S' \in Ob(\boldsymbol{E}')$ et tout $(f',g') \in Hom(S',R')^2$, soit

(7.34) $$u'_{f',g'} : x'^{g'} \to \bar{x}'^{f'}$$

le S'-isomorphisme dont la première projection est

(7.35) $$u_{f,g} \quad , \quad S = a(S') \quad , \quad (f,g) = (a(f'), a(g')).$$

Il est aisé de démontrer que les $u'_{f',g'}$ définissent un objet (x', U') de $Tr(F'/E',R')$. Par définition, ce sera l'image de (x,U) par le foncteur $Tr(F/E,a)$. Son action sur les flèches est définie de manière analogue.

On montre aisément que le carré ci dessous est commutatif

(7.36)

$$\begin{array}{ccc} \overleftarrow{Lim}(F/E) & \longrightarrow & \overleftarrow{Lim}(F'/E') \\ \downarrow \iota & & \downarrow \iota' \\ Tr(F/E,R) & \xrightarrow[Tr(F/E,a)]{} & Tr(F'/E',R') \end{array} ,$$

dans lequel ι et ι' sont les foncteurs de (7.24).

Remarque 7.6. Ces deux propriétés de fonctorialité sont compatibles : sous les hypothèses de 7.4. et 7.5., si μ' : $F \times_E E' \to G \times_E E'$ est déduit de μ par le changement de base a, on a

$$Tr(G/E,a) \circ Tr(\mu) = Tr(\mu') \circ Tr(F/E,a). \tag{7.37}$$

7 - *c) Réduction à une catégorie simpliciale.*

Définition 7.7. On appelle catégorie simpliciale une sous-catégorie pleine de (Simpl), de (S.Simpl) ou de (S.S.Simpl) dont $[O,O]$ est un objet.

On notera qu'une catégorie simpliciale contient la sous-catégorie pleine de (S.S.Simpl) qui a les mêmes objets, (pour les notations, cf. (2.1) et infra). Soit S l'opposée d'une catégorie simpliciale et soit

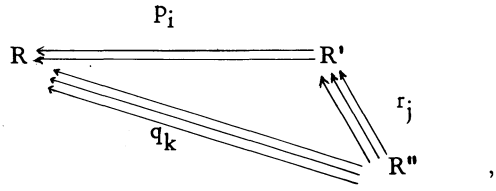
$$a : S \to E \tag{7.38}$$

un foncteur. Dans tout ce paragraphe nous utiliserons les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
a(q_1^i) &= p_i \quad , \quad p_i : R' \to R \quad , \quad 0 \leqslant i \leqslant 1, \\
a(q_2^k) &= q_k \quad , \quad q_k : R'' \to R \quad , \quad 0 \leqslant k \leqslant 2, \\
a(p_2^j) &= r_j \quad , \quad r_j : R'' \to R' \quad , \quad 0 \leqslant j \leqslant 2, \\
a(d_0^0) &= d \quad , \quad d : R \to R' \quad , \\
a(d_1^1) &= d' \quad , \quad d' : R \to R'' \quad ,
\end{aligned} \tag{7.39}$$

chaque fois que les flèches de $(S.Simpl)^o$ qui y figurent [hormis le renversement des flèches, elles sont notées comme dans (2.16)], appartiennent à $Fl(S)$. Par exemple, si S contient $(S.S.Simpl)_2^o$, on a un diagramme de E

(7.40)



,

les composés non triviaux étant donnés par les formules

$$\left\{\begin{array}{ll}
q_1^0 p_2^0 = q_2^1 & q_1^1 p_2^0 = q_2^2 \\
q_1^0 p_2^1 = q_2^0 & q_1^1 p_2^1 = q_2^2 \\
q_1^0 p_2^2 = q_2^0 & q_1^1 p_2^2 = q_2^1
\end{array}\right. , \tag{7.41}$$

qui sont écrites dans $(S.S.Simpl)_2^o$.

Les foncteurs tels que a sont généralement définis grâce au lemme suivant.

Lemme 7.8. Soient $\boldsymbol{E}$ une catégorie, R un objet de $\boldsymbol{E}$ et N un entier positif ou nul. Soit, pour tout $n \leqslant \mathbf{N}$, $1 \leqslant n \leqslant N$, une puissance $(n+1)$-ième de R dans $\boldsymbol{E}$ notée $(R^n, \pi_n^i, 0 \leqslant i \leqslant n)$. Il existe un foncteur $a : (\mathrm{Simpl})_N^o \to \boldsymbol{E}$ caractérisé par le fait qu'il commute aux produits et que, pour tout entier n, $1 \leqslant n \leqslant N$, et tout entier i, $0 \leqslant i \leqslant n$, on a $a(q_n^i) = \pi_n^i$. Tout foncteur $a' : (\mathrm{Simpl})_N^o \to \boldsymbol{E}$ qui commute au produit et vérifie $a'(\Delta_0) = R$ est canoniquement isomorphe à a.

Evidemment

Définition 7.9. Soit $\boldsymbol{S}$ une catégorie simpliciale et soit $a : \boldsymbol{S}^o \to \boldsymbol{E}$ un foncteur. Nous dirons que a commute aux produits s'il vérifie les conditions équivalentes suivantes :

(i) pour tout objet Δ_n de $\boldsymbol{S}$, $(a(\Delta_n), a(q_n^i), 0 \leqslant i \leqslant n)$ est, dans $\boldsymbol{E}$, une puissance $(n+1)$-ème de $a(\Delta_0)$,

(ii) si $\boldsymbol{S}'$ désigne la sous-catégorie pleine de (Simpl) qui a les mêmes objets que $\boldsymbol{S}$, a se prolonge en un foncteur qui commute au produit $a' : \boldsymbol{S}'^o \to \boldsymbol{E}$.

Remarquons simplement que Δ_0 est un objet de $\boldsymbol{S}$ mais que l'ensemble des entiers n tels que Δ_n soit objet de $\boldsymbol{S}$ n'est pas nécessairement un intervalle.

Théorème 7.10. Soit $\varphi : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$ un foncteur. Soit $\boldsymbol{S}$ l'opposée d'une catégorie simpliciale et soit $a : \boldsymbol{S} \to \boldsymbol{E}$ un foncteur qui commute aux produits. Posons $R = a(\Delta_0)$ et supposons que, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{E})$, l'ensemble Hom(S,R) soit non vide.

(i) le foncteur $\rho : \varprojlim(\boldsymbol{F}/\boldsymbol{E}) \to \varprojlim(\boldsymbol{F} \times_{\boldsymbol{E}} \boldsymbol{S}/\boldsymbol{S})$ est **fidèle,**

(ii) si Δ_1 est objet de $\boldsymbol{S}$ le foncteur ρ est **pleinement fidèle,**

(iii) si Δ_1 et Δ_0 sont objets de $\boldsymbol{S}$ et si $\varphi : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$ est **fibrant** le foncteur ρ est une équivalence.

Nous démontrerons un résultat un peu plus général. Soit $\boldsymbol{S}$ l'opposée d'une catégorie simpliciale et soit $a : \boldsymbol{S} \to \boldsymbol{E}$ un foncteur. Adoptons les notations de (7.39). Pour tout objet S de $\boldsymbol{E}$, on a une application

$$z : \mathrm{Hom}(S,R') \to \mathrm{Hom}(S,R)^2, \quad z(h) = (p_0 h, p_1 h), \tag{7.42}$$

et si l'on pose

(7.43) $\quad X(S) = \{(a,b) \in \mathrm{Hom}(S,R')^2 \ , \ p_1 a = p_0 b \} \ ,$

on a une application

(7.44) $\quad z' : \mathrm{Hom}(S,R'') \to X(S), \ z'(k) = (r_2 k, r_0 k).$

En effet, d'après (7.41), on a $p_1 r_2 = p_0 r_0 = q_1$.

Proposition 7.11. Soit $\varphi : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$ un foncteur.

(i) Soit $R \in Ob(\boldsymbol{E})$ tel que, pour tout $S \in Ob(\boldsymbol{E})$, l'ensemble Hom(S,R) soit non vide. Le foncteur " valeur en R "

(7.45) $\quad v_R : \underset{\leftarrow}{Lim}(\boldsymbol{F}/\boldsymbol{E}) \to \boldsymbol{F}_R \ , \ v_R(x) = x(R), \ ,$

est **fidèle.**

(ii) Soit $a : \boldsymbol{S}_1 \to \boldsymbol{E}$ un foncteur, $\boldsymbol{S}_1 = (\mathrm{S.S.Simpl})_1^o$. Adoptons les notations de (7.39) et supposons que $R = a(\Delta_0)$ vérifie la condition de (i). Supposons de plus que, pour tout objet S de $\boldsymbol{E}$, la relation d'équivalence engendrée dans l'ensemble Hom(S,R) par la relation "(x,y) appartient à l'image de z", cf. (7.42), n'ait qu'une classe d'équivalence. Le foncteur $\underset{\leftarrow}{Lim}(\boldsymbol{F}/\boldsymbol{E}) \to \underset{\leftarrow}{Lim}(\boldsymbol{F}'/\boldsymbol{S}_1)$, $\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{F} \times_{\boldsymbol{E}} \boldsymbol{S}_1$, est **pleinement fidèle.**

(iii) Soit $a : \boldsymbol{S}_2 \to \boldsymbol{E}$ un foncteur, $\boldsymbol{S}_2 = (\mathrm{S.S.Simpl})_2^o$. Adoptons les notations de (7.39) et supposons que la restriction de a à $\boldsymbol{S}_1$ vérifie les conditions de (ii). Supposons de plus que φ soit **fibrant** et que, pour tout $S \in Ob(\boldsymbol{E})$, z soit injective, z' surjective et que la symétrisée de la relation $[(a,b) \in \mathrm{Im}(z)]$ soit transitive.
Le foncteur $\varphi : \underset{\leftarrow}{Lim}(\boldsymbol{F}/\boldsymbol{E}) \to \underset{\leftarrow}{Lim}(\boldsymbol{F}'/\boldsymbol{S}_2)$, $\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{F} \times_{\boldsymbol{E}} \boldsymbol{S}_2$,
est une **équivalence de catégories.**

On notera que, dans 7.11.(ii), la donnée du foncteur a équivaut à celle de deux flèches de $\boldsymbol{E}$ ayant même source et même but : $p_0, p_1 : R' \rightrightarrows R$.

Montrons comment 7.10. résulte de 7.11.. Vu la définition d'une catégorie simpliciale, sous les hypothèses de 7.10.(i) (resp. (ii)) (resp. (iii)), il est clair que $\boldsymbol{S}$ contient $\boldsymbol{S}_n = (\mathrm{S.S.Simpl})_n^o$ avec n = 0, (resp. n = 1) (resp. n = 2). Soit $a' : \boldsymbol{S}_n \to \boldsymbol{E}$ la restriction de a à $\boldsymbol{S}_n$. Il est clair que a' vérifie les hypothèses de 7.11.(i) (resp. (ii)) (resp. (iii)). Il en est de même du foncteur d'inclusion de $\boldsymbol{S}_n$ dans $\boldsymbol{S}$. D'où la conclusion, cf. 6.12. et 6.13..

Corollaire 7.12. Soient $\boldsymbol{S} \supset \boldsymbol{S}'$ deux catégories simpliciales.
Pour tout foncteur fibrant $\varphi : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{S}$, le foncteur restriction

$$\varprojlim(F/S) \to \varprojlim(F'/S') \quad , \quad F' = F \times_S S' \quad ,$$

est **fidèle.** Si Δ_1 est objet de S' il est **pleinement fidèle.** Si Δ_1 et Δ_2 sont objets de S', c'est une **équivalence.**

En effet, comme plus haut, on peut supposer que $S' = S_n$ où n vaut 0,1 ou 2 suivant les cas. Le foncteur d'inclusion vérifie alors les hypothèses de 7.11.(i) ou (ii) ou (iii), suivant les cas.

Il nous reste à démontrer 7.11.. Pour les deux premières assertions, on utilise les résultats du paragraphe a) et en particulier la bijection (7.6) et l'égalité (7.11). Le résultat est alors évident, vu le calcul des limites projectives d'ensembles.

Il nous reste à prouver 7.11. (iii). Il est clair que le foncteur ρ de 7.11.(iii) est pleinement fidèle, car la restriction de a à S_1 vérifie les hypothèses de 7.11.(ii) et car le foncteur d'inclusion de S_1 dans S_2 est F-1-fidèle d'après 7.12.. Par ailleurs, il est clair que l'on peut remplacer F par une E-catégorie scindée car toute catégorie est E-équivalente à une catégorie scindée, d'après 5.6.. Utilisant la commutativité du carré 7.36. (dont les flèches verticales sont des équivalences d'après 7.2.). On sait alors que le foncteur

$$Tr(F/E,a) : Tr(F/E,R) \to Tr(F'/S_2,\Delta_0), \tag{7.46}$$

est **pleinement fidèle** et il nous reste à prouver qu'il est essentiellement surjectif.

Vu la construction du foncteur $Tr(F/E,a)$, le corollaire suivant donnera la conclusion, car le foncteur identique de S_2 vérifie évidemment les hypothèses de 7.11. (iii).

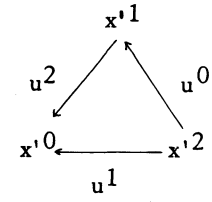
Corollaire 7.13. Soit $\varphi : F \to E$ une catégorie munie d'un **scindage** et soit $a : S_2 \to E, S_2 = (\text{S.S.Simpl})_2^o$, un foncteur vérifiant les hypothèses de 7.11.(iii), (avec les notations de (7.39)). Soit $x \in Ob(F_R)$. Ses images inverses par les morphismes qui figurent dans (7.40) sont notées :

$$x^i = p_i^*(x),\ 0 \leqslant i \leqslant 1, \quad \text{et} \quad x'^k = q_k^*(x), 0 \leqslant k \leqslant 2. \tag{7.47}$$

Soit $u : x^1 \to x^0$ un R' - isomorphisme. Posons

$$u^j = r_j^*(u)\ ,\ 0 \leqslant j \leqslant k\ , \tag{7.48}$$

On a un triangle dans la catégorie F_R.



(i) Il existe au plus un système transitif et transportable d'isomorphismes entre les images inverses de x dont la valeur sur le couple (p_0,p_1) soit égale à u.

(ii) Pour qu'il en existe, il faut et il suffit que le triangle ci-dessus soit commutatif, i.e. que l'on ait

(7.49) $$u^2.u^0 = u^1 .$$

Démonstration. L'unicité d'un tel système est claire. En effet, pour tout $S\in Ob(\boldsymbol{E})$ et tout $(f,g)\in Hom(S.R)^2$ qui appartient à l'image de z, cf. (7.42),$(f,g) = z(h)$, sa valeur est u^h car il est transportable. Puisqu'il est transitif, ceci détermine sa valeur sur tout élément de $Hom(S,R)^2$, d'après l'hypothèse qui figure dans 7.11.(ii).. L'existence d'un tel système entraîne la relation (7.49) car sa valeur sur le couple (p_0r_j,p_1r_j) est u^j d'après la transportabilité (cf. (7.20)). La relation de transitivité, (7.19), pour le triplet (q_0,q_1,q_2) n'est autre que (7.49).

Inversement, montrons que (7.49) entraîne l'existence d'un tel système. Pour tout $S\in Ob(\boldsymbol{E})$, désignons par I(S) l'image de l'application z de (7.42). Puisque z est **injective** pour tout $(f,g)\in I(S)$, il existe $h\in Hom(S,R')$ caractérisé par $z(h) = (f,g) = (p_0h,p_1h)$, d'où un S-isomorphisme

(7.50) $$u^h : x^g \to x^f \quad , \quad u_{f,g} = u^h.$$

La relation de transitivité (7.19) est vérifiée chaque fois que cela est possible. Plus précisément, elle l'est pour tout $(f,g,h)\in Hom(S,R)^3$ tel que $(f,g)\in I(S)$ et $(g,h)\in I(S)$. En effet, soit $h\in Hom(S,R')$ tel que $z(h) = (f,g)$ et soit $h'\in Hom(S,R')$ tel que $z(h') = (g,h)$. On a $g = p_1h = p_0h'$. L'application z' de (7.44) étant surjective, il existe $k\in Hom(S,R")$ tel que $h = r_2k$ et $h' = r_0k$. Posons $h" = r_1k$, on a
$z(h") = (p_0r_1k, p_1r_1k) = (q_0k,q_2k)$, en vertu de (7.41).
On a donc $z(h") = (f,h)$. La relation de transitivité résulte alors, par transport suivant k, de (7.49). Enfin, pour toute flèche $h : T \to S$ de $\boldsymbol{E}$ et tout $(f,g)\in I(S)$, on a évidemment la relation de " tranportabilité ", (7.20). D'après l'hypothèse faite dans 7.11.(iii), il est facile de montrer que, pour tout $S\in Ob(\boldsymbol{E})$, il existe un système transitif d'isomorphismes entre les x^f, $f\in Hom(S,R)$, caractérisé par le fait que sa valeur sur les couples $(f,g)\in I(S)$ est donnée par (7.50). On obtient ainsi un système transportable et transitif d'isomorphismes entre les images inverses de x dont la valeur sur le couple (p_0,p_1) est u, par construction.

C.Q.F.D.

On obtient sans difficulté un énoncé plus précis lorsque l'on considère un foncteur $a : S_2 \to E$ qui commute aux produits.

Corollaire 7.14. Soit $\varphi : F \to E$ une E-catégorie **scindée.**

Soit $a : S_2 \to E$ un foncteur qui commute aux produits. Avec les notations de (7.39), supposons que, pour tout $S \in Ob(E)$, l'ensemble Hom(S,R) soit non vide. **Alors**

(i) pour tout $x \in Ob(F_R)$ et tout R'-isomorphisme $u : p_1^*(x) \to p_0^*(x)$ Il existe un système transportable d'isomorphismes entre les images inverses de x, caractérisé par le fait que u est sa valeur sur le couple (p_0, p_1).

(ii) sous les hypothèses de (i), pour que ce système soit transitif il faut et il suffit, qu'avec les notations de (7.47) et (7.48), on ait (7.49).

Corollaire 7.15. Soit $\varphi : F \to E$ un foncteur **fibrant** et soit $a : (S.Simpl)_2^o \to E$ un foncteur qui commute aux produits. Avec les notations de (7.39), supposons que, pour tout $S \in Ob(E)$, l'ensemble Hom(S,R) soit non vide.

(i) si le foncteur image inverse relatif à $d : R \to R'$, cf. (7.39), est **fidèle**, le foncteur "valeur en R"

$$v_R : \underset{\leftarrow}{Lim}(F/E) \to F_R, \quad v_R(x) = x(R),$$

est pleinement fidèle,

(ii) si le foncteur image inverse relatif à d (resp. d') est pleinement fidèle (resp. fidèle) le foncteur valeur en R est une équivalence.

Pour prouver (i), on utilise la bijection (7.6) et la relation $p_0.d = p_1.d = id_R$. Pour prouver (ii), on remarque que cet énoncé est invariant par E-équivalence. D'après 5.6., on peut supposer que $\varphi : F \to E$ est muni d'un scindage et l'on conclut grâce au corollaire suivant

Corollaire 7.16. Sous les hypothèses de 7.15.(ii), supposons de plus que φ soit muni d'un **scindage.** Pour tout objet x de F_R, il existe un, et un seul, système transitif et transportable d'isomorphismes entre les images inverses de x, cf. (7.21).

D'après 7.14., un tel système est caractérisé par sa valeur sur le couple (p_0, p_1), notée u. Pour que le système **transportable** associé à un tel u soit transitif, il faut que sa valeur sur le couple (z,z) soit égale à

id_x, où l'on a posé $z = id_R$. En vertu de $z^d = p_o\, d = p_1 d$, on en déduit, par transport suivant d, que l'on doit avoir $u^d = id_x$. Ceci montre l'unicité, sous la seule hypothèse que le foncteur image inverse associé à d soit fidèle.. S'il est pleinement fidèle, la relation $u^d = id_x$ détermine un R'-isomorphisme $u : p_1^*(x) \to p_0^*(x)$. Pour achever la démonstration, il nous reste à prouver (7.49), avec les notations de (7.47) et (7.48). Or le foncteur image inverse relatif à d' est supposé fidèle, Il nous suffit donc de prouver la relation déduite de (7.49) par transport suivant d' : $R \to R''$.. En vertu de la relation $d = r_j.d'$, $0 \leqslant j \leqslant 2$, on a $(u^j)^{d'} = u^d$, d'où, par construction, $(u^j)^{d'} = id_x$.

C.Q.F.D.

Montrons maintenant une proposition qui permettra de raffiner le théorème de comparaison 6.16..

Proposition 7.17. Soit $a : (S.S.Simpl)_2^o \to \boldsymbol{E}$ un foncteur vérifiant les hypothèses; de 7.11.(iii). Adoptons les notations de (7.39). Soient $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{G}$ deux $\boldsymbol{E}$-catégories fibrées et soit $\mu : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{G}$ un $\boldsymbol{E}$-foncteur **cartésien.** Pour tout $S \subset Ob(\boldsymbol{E})$, désignons par $\mu_S : \boldsymbol{F}_S \to \boldsymbol{G}_S$ le foncteur induit par μ sur les catégories fibres en S. Désignons par $\underset{\leftarrow}{\boldsymbol{Lim}}(\mu) : \underset{\leftarrow}{\boldsymbol{Lim}}(\boldsymbol{F}/\boldsymbol{E}) \to \underset{\leftarrow}{\boldsymbol{Lim}}(\boldsymbol{G}/\boldsymbol{E})$ le foncteur induit par la composition avec μ .

(i) si μ_R est fidèle, le foncteur $\underset{\leftarrow}{\boldsymbol{Lim}}(\mu)$ l'est aussi,

(ii) si μ_R est pleinement fidèle et si $\mu_{R'}$ est fidèle, le foncteur $\underset{\leftarrow}{\boldsymbol{Lim}}(\mu)$ est pleinement fidèle,

(iii) si μ_R est une équivalence, si $\mu_{R'}$ est pleinement fidèle et si $\mu_{R''}$ est fidèle, le foncteur $\underset{\leftarrow}{\boldsymbol{Lim}}(\mu)$ est une **équivalence.**

(iv) si $\mu_{R'}$ est pleinement fidèle et si $\mu_{R''}$ est fidèle. Pour qu'un objet Y de $\underset{\leftarrow}{\boldsymbol{Lim}}(\boldsymbol{G}/\boldsymbol{E})$ appartienne à l'image de $\underset{\leftarrow}{\boldsymbol{Lim}}(\mu)$ il faut et il suffit qu'il existe $x \in Ob(\boldsymbol{F}_R)$ tel que $\mu(x) = Y(R)$. Il existe alors $X \in Ob(\underset{\leftarrow}{\boldsymbol{Lim}}(\boldsymbol{F}/\boldsymbol{E}))$ tel que $X(R) = x$ et $\mu.X = Y$.

Scholie 7.18. Nous utiliserons cette proposition de deux façons.. Tout d'abord en supposant que $\boldsymbol{E}$ est une catégorie simpliciale contenant $(S.S.Simpl)_n^o$ et que a est le foncteur d'inclusion correspondant. D'autre part en supposant que R est un objet de $\boldsymbol{E}$ qui vérifie 7.11.(i) et dont le carré R' et le cube R" existent dans $\boldsymbol{E}$. Dans ce cas, on construit un foncteur a comme il est dit dans 7.8.. Grâce à 7.26 et 7.28., [ou à 7.23. , cf. (7.53)] on peut généraliser le résultat ainsi obtenu en remplaçant R par une famille d'objets de $\boldsymbol{E}$ qui engendrent $\boldsymbol{E}$ comme crible d'elle-même. Une telle famille existe évidemment toujours.

Démonstration de 7.17.. Les deux premières assertions résultent des propriétés des applications (7.6) et (7.14). On notera que (iii) résulte évidemment de (ii) et de (iv). Pour prouver (iv), on peut remplacer le foncteur $\mu : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{G}$ par $\Phi\wr\mu : \Phi\wr\boldsymbol{F} \to \Phi\wr\boldsymbol{G}$ qui est un morphisme de catégories scindées. En effet, les foncteurs $v\boldsymbol{F}$ et $v\boldsymbol{G}$ de (5.21) sont des équivalences et, de plus, $v\boldsymbol{G}$ est surjectif sur les objets, cf. 5.6.. Supposons donc que μ est un morphisme de catégories scindées, cf. (5.2). D'après 7.4. et (ii), le foncteur

$$\boldsymbol{Tr}(\mu) : \boldsymbol{Tr}(\boldsymbol{F}/\boldsymbol{E}, R) \to \boldsymbol{Tr}(\boldsymbol{G}/\boldsymbol{E}, R),$$

est pleinement fidèle. Le foncteur t' de (7.32) étant surjectif sur les objets, pour prouver (iv), il nous suffit de prouver que, pour qu'un objet (y,V) de $\boldsymbol{Tr}(\boldsymbol{G}/\boldsymbol{E}, R)$ appartienne à l'image de $\boldsymbol{Tr}(\mu)$ il faut et il suffit qu'il existe $x \in Ob(\boldsymbol{F}_S)$ tel que $\mu(x) = y$. La condition est évidemment nécessaire, de même que celle de (iv). Prouvons qu'elle est suffisante..

Soit donc (y,V) un objet de $\boldsymbol{Tr}(\boldsymbol{G}/\boldsymbol{E}, R)$ et soit $x \in Ob(\boldsymbol{F}_R)$ tel que $\mu(x) = y$. Désignons par x^i (resp. y^i) l'image inverse de x (resp. y) par p_i, $0 \leqslant i \leqslant 1$, cf. (7.40). La valeur de V sur le couple (p_0, p_1) est un R'-isomorphisme $v : y^1 \to y^0$. Puisque μ est un morphisme de catégories **scindées,** on a $\mu(x^i) = y^i$, $0 \leqslant i \leqslant 1$, Il existe donc un R'-isomorphisme $u : x^1 \to x^0$, caractérisé par $\mu(u) = v$, car $\mu_{R'}$ est pleinement fidèle. Désignons par u^j (resp. v^j) l'image inverse de u (resp. v) par $r_j : R'' \to R'$, cf. (7.40). Puisque μ est un morphisme de catégories scindées, on a $\mu(u^j) = v^j$, $0 \leqslant j \leqslant 2$.

D'après 7.13.(ii), on a $v^2.v^0 = v^1$ et, puisque $\mu_{R''}$ est fidèle, on a $u^2.u^0 = u^1$. D'après 7.13.(ii), il existe donc un objet (x,U) de $\boldsymbol{Tr}(\boldsymbol{F}/\boldsymbol{E}, R)$ tel que la valeur de U sur le couple (p_0, p_1) soit u. D'après la description d'un foncteur $\boldsymbol{Tr}(\mu)$, si (y,V') est l'image de (x,U), la valeur de V' sur le couple (p_0, p_1) est égale à v, ce qui permet de conclure, grâce à 7.13.(i).

C.Q.F.D.

7 - d) La catégorie $\boldsymbol{Fam}(\boldsymbol{E})$; applications aux changements de base simpliciaux.

Les résultats du paragraphe précédent: 7.10., 7.11. et 7.14., fournissent un procédé de calcul de $\boldsymbol{\varprojlim}(\boldsymbol{F}/\boldsymbol{E})$ dont la portée est plus générale qu'il ne paraît. S'il n'existe pas d'objet R de $\boldsymbol{E}$ possédant la propriété de 7.11.(i), il existe en tous cas une famille d'objets de $\boldsymbol{E}$ engendrant $\boldsymbol{E}$ comme crible d'elle-même. On note alors que cette famille

définit un objet R de ***Fam(E)*** qui possède la propriété de 7.11.(i), et que le carré (resp. cube) de R dans ***Fam(E)*** est la famille des produits deux à deux (resp. trois à trois) des éléments de R. Dans certains cas, la proposition 7.23. ci dessous permet de généraliser les énoncés ci dessus (par exemple, pour 7.17. utiliser également la formule (7.53)). Nous donnerons de plus, ((7.60) et infra), un procédé de construction de " changements de base simpliciaux " qui possèdent des propriétés analogues à ceux qui interviennent dans le paragraphe précédent et la construction d'une catégorie fibrée sur $(S.S.Simpl)^{o}_{2}$ qui suffit à reconstruire $\underset{\leftarrow}{Lim}(F/E)$.

Soit $\mathbb{U}$ un univers non vide et soit $\mathbf{C}$ une $\mathbb{U}$-catégorie. On définit la catégorie ***Fam(C)*** de la manière suivante :

- ses objets sont les familles $(x_i)_{i\in I}, x_i \in Ob(\mathbf{C})$, $i\in I$,

- une flèche de source $(y_j)_{j\in J}$ et de but $(x_i)_{i\in I}$ est un couple (u, u), où $u: J \to I$ est une application et où $u = (u_j)_{j\in J}$ est une famille de flèches de $\mathbf{C}$, $u_j : y_j \to x_{u(j)}$.

- étant données deux flèches composables

$$u: J \to I \quad , \quad u = (u_j : y_j \to x_{u(j)})_{j\in J}$$

et

$$v: K \to J \quad , \quad v = (v_k : z_k \to y_{v(k)})_{k\in K}$$

leur composé est, par définition,

$$uv: K \to I \quad , \quad (u_{v(k)} \cdot v_k : z_k \to x_{uv(k)})_{k\in K}. \tag{7.51}$$

On vérifie immédiatement que l'on a bien défini une catégorie.

La formation de ***Fam(C)*** est fonctorielle en $\mathbf{C}$ de manière évidente. On peut reconstruire ***Fam(C)*** à partir de $(Cat)_{//\mathbf{C}}$, ce qui permet de déduire de l'étude de cette catégorie faite au n° 1 quelques propriétés faciles..

Considérons le diagramme

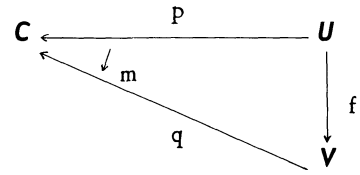
$$\begin{array}{ccc} & \varepsilon_{\mathbf{C}} & \\ (Cat)_{//\mathbf{C}} & \longleftarrow & \textbf{\textit{Fam(C)}} \\ \sigma_{\mathbf{C}} \downarrow & & \downarrow i_{\mathbf{C}} \\ (Cat) & \longleftarrow & (Ens) \\ & \varepsilon & \end{array} \tag{7.52}$$

dans lequel

- ε désigne le foncteur qui, à tout ensemble $I \in \mathbb{U}$, associe la catégorie **discrète** dont l'ensemble d'objets de l'ensemble de flèches sont égaux à I, cependant que les applications structurales (source, but etc...) sont égales au morphisme identique de I,

- $i_{\mathbf{C}}$ désigne le foncteur qui, à toute famille $(x_i)_{i \in I}$ d'objets de $\mathbf{E}$, associe l'ensemble d'indices I,

- $\sigma_{\mathbf{C}}$ désigne le foncteur qui, à toute flèche de $(\mathrm{Cat})_{//\mathbf{C}}$, notée comme suit, cf. (1.40),

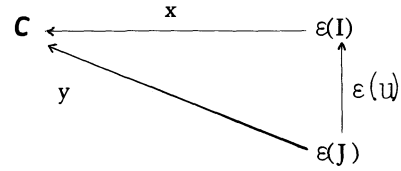


associe le foncteur f, i.e. la flèche $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ de (Cat)

- le foncteur $\varepsilon_{\mathbf{C}}$ est défini comme suit. Pour tout objet $(x_i)_{i \in I}$ de $\mathbf{Fam(C)}$, la catégorie $\varepsilon(I)$ est munie d'un foncteur

$$x : \varepsilon(I) \to \mathbf{C}, \qquad i \rightsquigarrow x_i \ .$$

Ce sera l'objet de $(\mathrm{Cat})_{//\mathbf{C}}$ associé à $(x_i)_{i \in I}$.
Si $(y_j)_{j \in J}$ est un autre objet de $\mathbf{Fam(C)}$ et si $u : J \to I$, $u_j : y_j \to x_{u(j)}$, $j \in J$, est une flèche de $\mathbf{Fam(C)}$, on a un triangle dans (Cat)



et la famille des u_j définit un morphisme de foncteurs

$$u : y \to x.\varepsilon(u).$$

d'où, enfin, une flèche de $(\mathrm{Cat})_{//\mathbf{C}}$.

Lemme 7.19. Pour toute $\mathbb{U}$-catégorie $\mathbf{C}$, le diagramme (7.52) est un produit fibré dans (Cat).

La démonstration est évidente.

Lemme 7.20. Soit $\varphi : \mathbf{F} \to \mathbf{E}$ un foncteur,

(i) une flèche $u : J \to I$, $u_j : y_j \to x_{u(j)}$ de $\mathbf{Fam(F)}$ est $\mathbf{Fam(E)}$-hypercartésienne (i.e. $\mathbf{Fam(E)}$-cartésienne si $\mathbf{Fam}(\varphi)$ est fibrant) si, e

seulement si, pour tout $j \in J$, u_j est une flèche $\boldsymbol{E}$-hypercartésienne (i.e. cartésienne si φ est fibrant) de $\boldsymbol{F}$.

(ii) Si φ est **fibrant**, il en est de même de $\boldsymbol{Fam}(\varphi)$.

Le lemme précédent et 1.9. permettent de déduire (i) de 1.14. et (ii) de 1.13.(i). De 1.13.(iii) et 1.9., on déduit qu'à tout clivage c de φ est associé un clivage c' de $\boldsymbol{Fam}(\varphi)$. Celui-ci est aisé à décrire en traduisant (1.78). Remarquons auparavant que, pour tout objet $x = (x_i)_{i \in I}$ de $\boldsymbol{Fam}(\boldsymbol{E})$ on a un **isomorphisme** canonique

$$\boldsymbol{Fam}(\boldsymbol{F})_x \to \prod_{i \in I} \boldsymbol{F}_i \quad , \tag{7.53}$$

entre la catégorie fibre de $\boldsymbol{Fam}(\boldsymbol{F})$ en x et le produit des catégories fibres de $\boldsymbol{F}$ en les x_i.

Lemme 7.21. Soit $\varphi : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$ un foncteur fibrant muni d'un clivage c et soit c' le clivage de $\boldsymbol{Fam}(\varphi)$ associé à c comme il vient d'être dit. Pour toute flèche de $\boldsymbol{Fam}(\boldsymbol{E})$, notée (U, u), $U : J \to I$, $u = (u_j : y_j \to x_{U(j)})_{j \in J}$, le foncteur image inverse associé à (U,u) par c' s'identifie, modulo les isomorphismes de (7.53) au foncteur

$$\prod_{i \in I} \boldsymbol{F}_i \qquad\qquad \prod_{j \in J} \boldsymbol{F}_j \quad , \tag{7.54}$$

produit des foncteurs images inverses associés par c aux u_j :

$$u_j^{\,c} : \boldsymbol{F}_{U(j)} \to \boldsymbol{F}_j \tag{7.55}$$

Lemme 7.22. Le foncteur **Fam** transforme limites projectives (dans (Cat)) en limites projectives et foncteurs discrets en foncteurs discrets.

Pour les limites projectives, cela est clair. Pour les foncteurs discrets, cela résulte de 7.20. (ii), du calcul des fibres, (7.53), et de 6.3.(ii)..

Proposition 7.23. Soit $\varphi : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$ un foncteur.

(i) Le foncteur défini par la fonctorialité de $\boldsymbol{Fam}(*)$:

$$\gamma : \underline{\Gamma}(\boldsymbol{F}/\boldsymbol{E}) \to \underline{\Gamma}(\boldsymbol{Fam}(\boldsymbol{F})/\boldsymbol{Fam}(\boldsymbol{E})) \tag{7.56}$$

se factorise

$$\sigma : \underleftarrow{\boldsymbol{Lim}}(\boldsymbol{F}/\boldsymbol{E}) \to \underleftarrow{\boldsymbol{Lim}}(\boldsymbol{Fam}(\boldsymbol{F})/\boldsymbol{Fam}(\boldsymbol{E})) \, . \tag{7.57}$$

(ii) le foncteur σ est une équivalence de catégories.

Il est clair que (i) résulte de 7.20. (i), compte tenu de 1.10.. Pour prouver (ii), nous allons construire un foncteur quasi-inverse de σ .

On peut reconstruire $\varphi : F \to E$ à l'aide de $Fam(\varphi)$. Pour cela, on choisit un ensemble de cardinal 1, soit $\{a\}$. Il permet, pour toute $\mathfrak{U}$-catégorie C, de définir un foncteur pleinement fidèle

$$\alpha_C : C \to Fam(C), \tag{7.58}$$

qui, à tout $x \in Ob(C)$, associe la famille indexée par $\{a\}$ telle que $x_a = x$..

Lemme 7.24. Pour tout foncteur $\varphi : F \to E$

(i) le carré ci-dessous est un produit fibré dans (Cat)

(7.59)
$$\begin{array}{ccc} Fam(F) & \xleftarrow{\alpha_F} & F \\ {\scriptstyle Fam(\varphi)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ Fam(E) & \xleftarrow[\alpha_E]{} & E \end{array}$$

(ii) le foncteur qu'il induit

$$\pi : \underset{\leftarrow}{Lim}(Fam(F)/Fam(E)) \to \underset{\leftarrow}{Lim}(F/E)$$

est **quasi-inverse** de (7.57).

(i) est trivial. De plus, il est clair que $\pi\sigma$ est le foncteur identique de $\underset{\leftarrow}{Lim}(F/E)$. Il reste à démontrer que π est pleinement fidèle. Disons seulement que ceci résulte du fait que, pour tout objet $x = (x_i)_{i \in I}$ de $Fam(E)$ et tout $i \in I$, on a une flèche de $Fam(E)$, notée $m_i : \alpha_E(x_i) \to x$ et définie par l'application $\{a\} \to I$, $a \rightsquigarrow i$, et par id_{x_i}. D'après 7.20.(i), la valeur sur cette flèche de toute section cartésienne de $Fam(\varphi)$ est un x_i-isomorphisme de F.

Proposition 7.25. Soit $\varphi : F \to E$ un foncteur et soit

$$\begin{array}{ccc} A & \xleftarrow{m} & B \\ a & \searrow & \swarrow b \\ & E & \end{array}$$

un triangle commutatif de (Cat).

Soit i un entier, $0 \leqslant i \leqslant 2$.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) le foncteur m est F-i-fidèle (resp. universellement)

(ii) le foncteur $Fam(m)$ est $Fam(F)$-i-fidèle (resp. universellement).

Ceci résulte immédiatement de 7.23. et de la définition 6.12. (resp. de 7.23., de la définition 6.17. et de 7.22).

Pour généraliser 7.10. et 7.11., nous partons maintenant d'un foncteur $a : \boldsymbol{S} \to \boldsymbol{Fam(E)}$ qui vérifie les hypothèses de 7.10. ou de 7.11.. Il est donc $\boldsymbol{Fam(F)}$-i-fidèle, $i = 0, 1$ ou 2, ce que nous allons traduire en termes de $\boldsymbol{E}$. Considérons le composé

(7.60) $$K = i_{\boldsymbol{E}}.a : \boldsymbol{S} \to (\text{Ens}), \quad \text{cf. (7.52)},$$

qui, a tout objet Δ_n de $\boldsymbol{S}$, associe l'ensemble d'indices K_n de

(7.61) $$a(\Delta_n) = (x_s)_{s \in K_n} .$$

Le foncteur K est un "ensemble simplicial" et le foncteur a définit un "objet simplicial de $\boldsymbol{E}$ de type K". Pour exprimer celui-ci, considérons le foncteur composé

(7.62) $$\varepsilon K = \varepsilon . i_{\boldsymbol{E}}.a : \boldsymbol{S} \to (\text{Cat}) , \quad \text{cf. (7.52)},$$

et la catégorie **coscindée**

(7.63) $$\boldsymbol{K} \to \boldsymbol{S},$$

opposée de la catégorie scindée $\Phi(\varepsilon K) \to \boldsymbol{S}^{o}$ associée à εK par 5.a). Il est clair que a définit un foncteur

(7.64) $$\kappa : \boldsymbol{K} \to \boldsymbol{E},$$

que l'on peut décrire comme suit. Un objet de $\boldsymbol{K}$ de projection $\Delta_n \in \text{Ob}(\boldsymbol{S})$ est essentiellement un élément s de K_n, cf. (7.61). On a

(7.65) $$\kappa(s) = x_s .$$

Puisque les fibres de $\boldsymbol{K}$ sont discrètes, une flèche $\mu : s \to t$ de $\boldsymbol{K}$ est définie par sa projection $m : \Delta_p \to \Delta_q$, et par sa source $s \in K_p$. Si l'image de m par a est (U, u), $U : K_p \to K_q$, $u = (u_s : x_s \to x_{U(s)})_{s \in K_p}$ le but de μ est $t = U(s)$ et l'image de μ par κ est

(7.66) $$\kappa(\mu) = u_s .$$

Pour obtenir un énoncé commode, nous utiliserons la construction "inverse". Soit $\boldsymbol{S}$ une catégorie (non nécessairement simpliciale), soit $\boldsymbol{K} \to \boldsymbol{S}$ une $\boldsymbol{S}$-catégorie **coscindée** dont les fibres sont des catégories discrètes et soit enfin $\kappa : \boldsymbol{K} \to \boldsymbol{E}$ un foncteur. On construit un foncteur

(7.67) $$a : \boldsymbol{S} \to \boldsymbol{Fam(E)},$$

en associant, à tout $n \in \text{Ob}(\boldsymbol{S})$, la famille $(\kappa(s))_{s \in K_n}$, ou K_n désigne l'ensemble d'objets de la catégorie fibre de $\boldsymbol{K}$ en n.

Théorème 7.26. Soit $\varphi : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$ un foncteur fibrant, soit $\boldsymbol{K} \to \boldsymbol{S}$ une $\boldsymbol{S}$-catégorie coscindée dont les catégories fibres sont discrètes et soit $\kappa : \boldsymbol{K} \to \boldsymbol{E}$ un foncteur. Soit $i \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant i \leqslant 2$. Les conditions suivantes

sont équivalentes :

(i) κ est F-i-fidèle,

(ii) le foncteur a de (7.67) est $Fam(F)$-i-fidèle.

Scholie 7.27. Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer en termes de K de κ et de E les hypothèses qui permettent d'appliquer 7.11. au foncteur a. Signalons seulement que 7.11.(i) signifie que S est une catégorie ponctuelle, que K est une catégorie discrète et que la famille $(\kappa(s))_{s\in Ob(K)}$ engendre E comme crible d'elle-même. **Les hypothèses de** 7.10., **signifient que** K **et** κ **sont obtenus comme suit.** Soit S l'opposée d'une catégorie simpliciale, 7.7.. On considère une famille $(R_i)_{i\in I}$ d'objets de E, qui engendre E comme crible d'elle-même. L'ensemble simplicial $K : S \to (Ens)$ est défini par $K(\Delta_n) = I^{n+1}$. On suppose que, pour tout $i\in I^{n+1}$, $i = (i_o, \ldots, i_n)$, le produit $R_i = R_{i_o} \times \ldots \times R_{i_n}$ existe dans E, pourvu que Δ_n appartienne à $Ob(S)$. On définit $\kappa : K \to E^n$ par $\kappa(i)=R_i$, son action sur les flèches étant définie de manière évidente par la propriété universelle du produit., cf. (7.66).

Pour démontrer 7.26., nous utiliserons un lemme :

Lemme 7.28. Sous les hypothèses de 7.26., soit $F' = F\times_E K$ et soit

$$F_K = \varprojlim_{K/S} (F'/K) \tag{7.68}$$

la catégorie de (4.35).

(i) il existe un S-isomorphisme $F'' \xrightarrow{\sim} F_K$, où F'' est la catégorie déduite de $Fam(F)$ par le changement de base a de (7.67).

(ii) si c est un clivage de φ, désignons par c" le clivage de F'' déduit par le changement de base a du clivage de $Fam(F)$ associé à c par 7.21.. Désignons par c' le clivage de F_K déduit de celui de F' sur K comme il est dit dans 4.11.. **L'isomorphisme** z **transforme** c" **en** c'.

Preuve du lemme. Nous remarquerons en premier lieu que, **ici**, les fibres de K sur S étant discrètes, la catégorie F_K, définie en général comme une sous-catégorie pleine de $\Pi = \Pi_{K/S}(F'/K)$, lui est égale.. La fibre de F_K en un objet n de S est canoniquement isomorphe à la catégorie produit $\prod_{s\in K_n} F_s$ des fibres de F en les $\kappa(s)$, cf. 4-b). Il est clair que cette fibre est également isomorphe à celle de F'', en vertu des isomorphes de (7.53). Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que ces

ces isomorphismes sur les catégories fibres sont induits par un S-isomorphisme $F'' \to F_K$. On peut d'ailleurs caractériser ce dernier par la propriété de (ii) (après choix d'un clivage de F), ce qui est le meilleur moyen de prouver (ii). On utilisera la description des flèches de F_K qui figure dans 4-b) et la description de son clivage : 4.10.. Pour ce dernier point, noter que l'unique coclivage de K sur S est son coscindage canonique, cf. 6.4..

Il nous reste à prouver 7.26.. Pour cela, nous considérons le carré dans (Cat)

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim(F/E) & \xrightarrow{\ k\ } & \varprojlim(F'/K) \\ \downarrow{\scriptstyle \sigma} & & \downarrow{\scriptstyle \iota} \\ \varprojlim(Fam(F)/Fam(E)) & \xrightarrow[a']{} & \varprojlim(F_K/S) \end{array}$$

où k est induit par le changement de base κ, où ι est l'isomorphisme de 4.7., où σ est l'équivalence de (7.57) et où, enfin, a' est induit par le changement de base a de (7.67), modulo l'isomorphisme de 7.28.(i). Ce carré est commutatif.

C.Q.F.D.

Comme annoncé, la S-catégorie fibrée F_K suffit à reconstruire $\varprojlim(F/E)$, du moins si $a : S \to Fam(E)$ vérifie les hypothèses de 7.10., cf. 7.27..

8 - Le théorème d'échange.

Dans ce numéro, on s'appuie sur le théorème d'associativité des $\varprojlim$, 4.7., pour démontrer diverses généralisations des résultats acquis au n° 7. Le résultat essentiel est le théorème d'échange, 8.8., variante abstraite de 10.8..

Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux catégories et soit

(8.1)
$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{A}\times\mathbf{B} & \\ {\scriptstyle\alpha}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle\beta} \\ \mathbf{A} & & \mathbf{B} \end{array}$$

leur produit, c'est à dire la catégorie dont l'ensemble d'objets (resp. de flèches) est le produit de ceux de $\mathbf{A}$ et de $\mathbf{B}$.

Soit $a\in Ob(\mathbf{A})$, on appellera "**a-ième colonne de $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$**" la catégorie fibre en a de la première projection. Son ensemble d'objets est donc $\{(a,b),\ b\in Ob(\mathbf{B})\}$. On la notera $\mathbf{B}_a$ car la seconde projection induit un isomorphisme entre $\mathbf{B}_a$ et $\mathbf{B}$. On définit de même la"b-ième ligne de $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$" et on la note $\mathbf{A}_b$ pour tout $b\in Ob(\mathbf{B})$.

Soient $u: \mathbf{A}' \to \mathbf{A}$ et $v: \mathbf{B}' \to \mathbf{B}$ deux foncteurs. Nous allons étudier, lorsque

(8.2)
$$\varphi: \mathbf{F} \to \mathbf{A}\times\mathbf{B}$$

est un foncteur **fibrant**, l'effet du changement de base

(8.3)
$$u\times v: \mathbf{A}'\times\mathbf{B}' \to \mathbf{A}\times\mathbf{B}$$

sur les catégories de sections cartésiennes, en étudiant séparément l'effet des foncteurs $u\times 1 : \mathbf{A}'\times\mathbf{B} \to \mathbf{A}\times\mathbf{B}$ et $1\times v : \mathbf{A}'\times\mathbf{B}' \to \mathbf{A}'\times\mathbf{B}$. Pour étudier ceux-ci, nous utiliserons 4.7. et 4.14. de la manière suivante.

L'ensemble des morphismes de $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ qui appartiennent à l'une de ses lignes est un ensemble de morphismes de transport pour la première projection et définit un **scindage** de $\alpha: \mathbf{A}\times\mathbf{B} \to \mathbf{A}$ qui est également un **coscindage**, cf. 1.5.. On a alors un diagramme de (Cat)

(8.4)
$$\begin{array}{ccc} \mathbf{F} & \longleftarrow & \mathbf{F}' \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi'} \\ \mathbf{A}\times\mathbf{B} & \xleftarrow{1\times v} & \mathbf{A}\times\mathbf{B}' \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle\alpha'} & \\ \mathbf{A} & & \end{array}$$

dans lequel α et α' sont les premières projections, α est un foncteur **fibrant** et φ' le foncteur déduit de φ par le changement de base $1 \times v$. **Les hypothèses de** 4.14., **où** (8.4) **remplace** (4.50) **sont vérifiées,** car α et α' sont **cofibrants** comme on vient de voir. Pour traduire 4.14., il nous reste à remarquer que, pour tout $a \in Ob(\mathbf{A})$, le foncteur déduit de $1 \times v$ par le changement de base $a' : \mathbb{\Delta}_0 \to \mathbf{A}$, $a'(0) = a$, cf. 4.14.(iii), n'est autre que le foncteur induit par $1 \times v$ sur les a-ièmes colonnes, lequel sera noté

$$v_a : \mathbf{B}'_a \to \mathbf{B}_a \quad , \quad a \in Ob(\mathbf{A}) \quad . \tag{8.5}$$

On déduit ainsi de 4.14. ;

Lemme 8.1. Soient $\mathbf{A}$ une catégorie, $v : \mathbf{B}' \to \mathbf{B}$ un foncteur et $\varphi : \mathbf{F} \to \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ un foncteur **fibrant.**

(i) il existe un $\mathbf{A}$-foncteur cartésien

$$p : \mathbb{L}\mathbf{F} \to \mathbb{L}\mathbf{F}', \tag{8.6}$$

où $\mathbb{L}\mathbf{F}$ et $\mathbb{L}\mathbf{F}'$ sont des $\mathbf{A}$-catégories **fibrées.**

(ii) Pour que le foncteur $1 \times v : \mathbf{A} \times \mathbf{B}' \to \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ soit $\mathbf{F}$-i-fidèle, $0 \leqslant i \leqslant 2$, il faut et il suffit que le foncteur

$$\underset{\leftarrow}{Lim}(p) : \underset{\leftarrow}{Lim}(\mathbb{L}\mathbf{F}/\mathbf{A}) \to \underset{\leftarrow}{Lim}(\mathbb{L}\mathbf{F}'/\mathbf{A})$$

soit **i-fidèle**, cf. 6.11. et 6.12.

(iii) pour tout $a \in Ob(\mathbf{A})$, pour que le foncteur induit par p sur les catégories fibres en a soit i-fidèle, $0 \leqslant i \leqslant 2$, il faut et il suffit que le foncteur $v_a : \mathbf{B}'_a \to \mathbf{B}_a$ soit $\mathbf{F}$-i-fidèle.

Lemme 8.2. Sous les hypothèses de 8.1. soit i un entier parmi 0,1 et 2 tel que, pour tout $a \in Ob(\mathbf{A})$, le foncteur v_a soit $\mathbf{F}$-i-fidèle. Le foncteur $1 \times v$ est $\mathbf{F}$-i-fidèle.

Il résulte de 8.1.(iii) que le foncteur p de 8.1.(i) est fidèle, pleinement fidèle ou une $\mathbf{A}$-équivalence selon que $i = 0$, 1 ou 2. D'où la conclusion, d'après 8.1.(ii).

Lemme 8.3. Soient $\mathbf{A}$ une catégorie et $\hat{\mathbf{B}}$ une catégorie munie d'un objet final e. Pour toute $(\mathbf{A} \times \hat{\mathbf{B}})$-catégorie **fibrée** $\mathbf{F}$, le foncteur d'inclusion de la e-ième ligne, $\mathbf{A}_e \to \mathbf{A} \times \hat{\mathbf{B}}$, est $\mathbf{F}$-2-fidèle.

On applique le lemme prédédent à $\mathbf{A}$ et au foncteur d'inclusion $v : \{e\} \to \hat{\mathbf{B}}$, où $\{e\}$ désigne la sous-catégorie de $\hat{\mathbf{B}}$ dont l'unique flèche est id_e. Pour tout $a \in Ob(\mathbf{A})$, le foncteur v_a est $\mathbf{F}$ - 2 fidèle

d'après 5.7., car (a,e) est un objet final de la a-ième colonne; d'où la conclusion.

Lemme 8.4. Sous les hypothèses de 8.1., soit e un objet finalde **A**. Pour que le foncteur $1 \times v$ soit $\boldsymbol{F}$-i-fidèle, $0 \leqslant i \leqslant 2$, il faut et il suffit que le foncteur v_e le soit.

En effet, dans le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} & \xleftarrow{1 \times v} & \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}' \\ {\scriptstyle i}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle j} \\ \boldsymbol{B}_e & \xleftarrow[v_e]{} & \boldsymbol{B}'_e \end{array}$$

les foncteurs d'inclusion i et j sont $\boldsymbol{F}$-2-fidèles d'après l'énoncé " symétrique " de 8.3..

Lemme 8.5. Sous les hypothèses de 8.1., soit $\lambda : \boldsymbol{S}_2 \to \boldsymbol{A}$ un foncteur vérifiant les hypothèses de 7.11.(iii), $\boldsymbol{S}_2 = (\mathrm{S.S.Simpl})^{\circ}_2$. Pour tout entier i, $0 \leqslant i \leqslant 2$, désignons par $v_i : \boldsymbol{B}'_i \to \boldsymbol{B}_i$ le foncteur induit par v sur les colonnes de $\lambda(\Delta_i)$,

(i) si v_0 est $\boldsymbol{F}$-0-fidèle, $1 \times v$ est $\boldsymbol{F}$-0-fidèle

(ii) si v_0 est $\boldsymbol{F}$-1-fidèle et si v_1 est $\boldsymbol{F}$-0-fidèle, $1 \times v$ est $\boldsymbol{F}$-1-fidèle,

(iii) si v_0 est $\boldsymbol{F}$-2-fidèle, si v_1 est $\boldsymbol{F}$-1-fidèle et si v_2 est $\boldsymbol{F}$-0-fidèle, $1 \times v$ est $\boldsymbol{F}$-2-fidèle.

(iv) si v_1 est $\boldsymbol{F}$-1-fidèle et si v_2 est $\boldsymbol{F}$-0-fidèle pour qu'un objet X de $\mathbb{H}(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}', \boldsymbol{F})$ appartienne à l'image de $\mathbb{H}(1 \times v, \boldsymbol{F})$, il faut et il suffit que la restriction de X à $\boldsymbol{B}'_0$ appartienne à l'image de $\mathbb{H}(v_0, \boldsymbol{F})$.

Pour démontrer les trois premières assertions, il suffit d'appliquer 7.17. au **A**-foncteur cartésien introduit dans 8.1.. Quant à (iv), elle résulte de 7.17.(iv) et d'un énoncé un peu plus précis que 8.1. qu'il est aisé d'extraire de 4.14.. On démontre en fait que, si Y_0 est un prolongement à $\boldsymbol{B}_0$ de la restriction X_0 de X à $\boldsymbol{B}'_0$, il existe un prolongement Y de X à $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ dont la restriction à $\boldsymbol{B}_0$ est égale à Y_0

Remarque 8.6. Rappelons que le foncteur $\lambda : \boldsymbol{S}_2 \to \boldsymbol{A}$ qui figure dans l'énoncé ci dessus vérifie les hypothèses de 7.11.(iii) si **A** est l'opposée d'une catégorie simpliciale contenant $(\mathrm{S.S.Simpl})^{\circ}_2$ et si λ est le foncteur d'inclusion **ou bien** si le foncteur λ commute aux produits et si, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{A})$, l'ensemble $\mathrm{Hom}(S, \lambda(\Delta_0))$ est non vide.

Notations 8.7. Pour tout entier $N \in \mathbf{Z}$, désignons par $(\hat{\text{Simpl}})_N$ la sous-catégorie pleine de la catégorie des ensembles finis dont les objets sont les intervalles $[0, n]$ de $\mathbf{N}$, pour $n \leqslant N$. Elle est donc munie d'un unique objet initial: l'ensemble vide, qui est d'ailleurs son seul objet si $N < 0$. On remarquera qu'elle ne diffère de la catégorie $(\text{Simpl})_N$, introduite au début du n° 2, que par la présence d'un objet initial. C'est pourquoi on la désigne par le même symbole, surmonté d'un $\hat{}$. De même, à partir de $(\text{S.Simpl})_N$ et $(\text{S.S.Simpl})_N$, on obtient $(\text{S.}\hat{\text{Simpl}})_N$ et $(\text{S.S.}\hat{\text{Simpl}})_N$. On appellera "**catégorie simpliciale complète**" une sous-catégorie $\hat{S}$ de $(\hat{\text{Simpl}})$ dont $\emptyset$ est un objet initial et qui est telle que la sous-catégorie pleine S de $\hat{S}$ dont l'ensemble d'objets est le complémentaire de $\{\emptyset\}$ dans $\text{Ob}(\hat{S})$ soit une catégorie simpliciale, cf. 7.7. (on dit que S est **associée à** $\hat{S}$). On définit évidemment ainsi une **bijection** entre l'ensemble des catégories simpliciales et celui des catégories simpliciales complètes. Dans chacune de ces dernières, on notera

$$\varphi_n : \emptyset \to [0, n] \tag{8.7}$$

les morphismes initiaux.

Théorème 8.8. (Théorème d'échange). Soit $\hat{S}$ l'opposée d'une catégorie simpliciale complète telle que la catégorie simpliciale associée, (dont l'opposée est notée S), contienne $(\text{S.S.Simpl})^{\circ}_2$. Pour tout objet $[0, i]$ de $\hat{S}$, on note :

- c_i le foncteur d'inclusion de la $[0, i]$-ième colonne de $\hat{S} \times S$ dans la $[0, i]$-ième colonne de $\hat{S} \times \hat{S}$

- l_i le foncteur d'inclusion de la $[0, i]$-ième ligne de $S \times \hat{S}$ dans la $[0, i]$-ième ligne de $\hat{S} \times \hat{S}$.

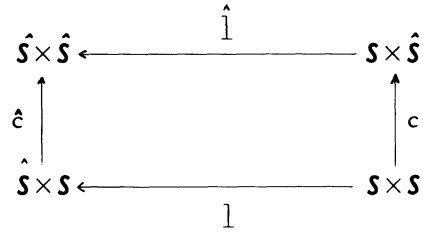
Pour toute $(\hat{S} \times \hat{S})$-catégorie fibrée F, on a le tableau de résultats suivant

Hypothèses	c_{-1}	0	1	2
	c_0		0	1
	c_1			0
	l_0	0	1	2
	l_1		0	1
	l_2			0
Conclusions	l_{-1}	0	1	2

dont chacune des colonnes est un théorème lorsqu'on la lit comme suit. Un chiffre i inscrit en regard d'un foncteur signifie que celui-ci est F-i-fidèle.

Considérons le carré commutatif défini par les foncteurs d'inclusion

(8.8)



(i) d'après 8.4., pour que $\hat{c}$ soit F-i-fidèle, $0 \leqslant i \leqslant 2$, **il faut et il suffit** que c_{-1} le soit. Par symétrie, pour $\hat{1}$ soit F-i-fidèle, $0 \leqslant i \leqslant 2$, **il faut et il suffit** que 1_{-1} le soit.

(ii) d'après 8.5.(i), pour que c (resp. 1) soit F-0-fidèle **il suffit** que c_0 (resp. 1_0) le soit

(iii) d'après 8.5.(ii), pour que c (resp. 1) soit F-0-fidèle **il suffit** que c_1 (Resp. 1_1) soit F-1-fidèle et que c_1(resp.1_1) soit F-0-fidèle

(iv) d'après 8.5.(iii), pour que c (resp. 1) soit F-2-fidèle, **il suffit** que c_0 (resp. 1_0) soit F-2-fidèle, que c_1 (resp. 1_1) soit F-1-fidèle et que c_2 (resp. 1_2) soit F-0-fidèle.

Ayant traduit les hypothèses et la conclusion en termes de F-fidélité des foncteurs qui figurent dans (8.8), on conclut en appliquant 6.13..

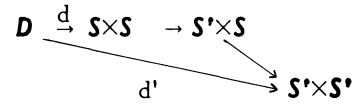
C.Q.F.D.

Remarquons qu'en omettant dans le tableau ci-dessus les hypothèses portant sur c_0 et c_1, on obtient cependant des conclusions de F-fidélité portant sur le composé $1\hat{c}$. Nous allons les interpréter grâce aux " catégories diagonales ". Soit A une catégorie. On appelle catégorie diagonale de $A\times A$ la sous-catégorie de $A\times A$ dont les flèches sont les couples (f,f), $f\in Fl(A)$. Il est clair que la restriction à la diagonale de la première (resp. seconde) projection de $A\times A$ induit un isomorphisme entre la diagonale et A.

Corollaire 8.9. Sous les hypothèses de 8.8., désignons par $\hat{S}'$ la sous-catégorie pleine de $(\text{Simpl})^o$ qui a les mêmes objets que $\hat{S}$ et supposons que F provienne par changement de base d'une catégorie fibrée $G \to \hat{S}'\times\hat{S}'$. Soit $\delta : D \to \hat{D}$ le foncteur d'inclusion de la diagonale de $S\times S$ dans celle de $\hat{S}\times\hat{S}$. Pour que le foncteur d'inclusion de $S\times S$ dans $\hat{S}\times\hat{S}$, (noté $1\hat{c}$ dans (8.8)), soit F-i-fidèle, $0 \leqslant i \leqslant 2$, il faut et il suffit que δ le soit. On a un tableau de résultats qui se lit comme le précédent

Hypothèses	c_{-1}	0	1	2
	1_0	0	1	2
	1_1		0	1
	1_2			0
Conclusions	δ	0	1	2

Il suffit évidemment de prouver la première assertion. Le foncteur d'inclusion de D dans $\hat{S}\times\hat{S}$ est F-2-fidèle car il transforme l'objet final de $\hat{S}$ en celui de $\hat{S}\times\hat{S}$. Il reste à montrer que le foncteur d'inclusion $d : D \to S\times S$ est F-2-fidèle (c'est à dire G-2-fidèle). Remarquons déjà que le foncteur d'inclusion $d' : D \to S'\times S'$ est F-2-fidèle car il commute aux produits, cf. 7.10.. Par ailleurs, d'après 8.2., le foncteur d'inclusion $S'\times S \to S'\times S'$ est G-2-fidèle.. En effet, pour tout $a\in Ob(S')$, il induit sur sur la colonne de a un foncteur isomorphe à l'inclusion $S \to S'$, donc G-2-fidèle d'après 7.12.. Par symétrie, le foncteur d'inclusion $S\times S \to S'\times S$ est lui aussi G-2-fidèle, d'où la conclusion.



On a en fait un résultat un peu plus précis

Lemme 8.10. Soit S l'opposée d'une catégorie simpliciale contenant $(S.Simpl)^o_2$, Pour toute $S\times S$-catégorie fibrée F, le foncteur d'inclusion de la diagonale de $S\times S$ est F-2-fidèle.

On notera que, vu la définition d'une catégorie simpliciale, la condition sur S montre que c'est une sous-catégorie pleine de $(Simpl)^o$ ou de $(S.Simpl)^o$, Dans le premier cas le foncteur $D \to S\times S$ vérifie évidemment les hypothèses de 7.10.(iii). Dans le second cas on montre qu'il vérifie celles de 7.11.(iii). Pour cela, on utilise la présence, dans (S.Simpl), des **applications diagonales** : les d^i_n de (2.16). [Introduire, pour tout couple (a,b) d'éléments de (S.Simpl), la relation d'ordre définie sur Hom(a,b) par le fait que ses éléments sont des morphismes d'ensembles ordonnés.].

9 - Données de recollement et de descente.

Ce numéro est consacré à la traduction de la définition 6.15. en un langage qui n'utilise pas les cribles, ni, surtout les " grosses " catégories introduites au numéro 5. Nous revenons ainsi à la définition donnée initialement par GROTHENDIECK, [TD].

9 - a) *Relatives à un morphisme.*

Dans tout ce paragraphe, $\varphi : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$ désignera un foncteur **muni d'un clivage** noté comme il est dit dans 1.6.. Nous allons d'abord prouver un lemme qui montre comment les calculs du numéro 7 interviennent dans l'étude des morphismes de descente.

Soit $r : R \to S$ une flèche de $\boldsymbol{E}$, soit (R', p_0, p_1) un produit fibré $R \times_S R$ et soit (R'', q_0, q_1, q_2) un produit fibré $R \times_S R \times_S R$. Il existe un foncteur

$$\hat{a} : (\hat{\mathrm{Simpl}})_2^o \to \boldsymbol{E} \tag{9.1}$$

caractérisé par

$$\hat{a}(\phi_0^0) = r \quad , \quad \hat{a}(q_1^i) = p_i \ , \ 0 \leqslant i \leqslant 1,$$
$$\hat{a}(q_2^k) = q_k \quad , \quad 0 \leqslant k \leqslant 2. \tag{9.2}$$

Pour les notations, voir 8.7., (8.7) et 2.16). Il est clair que $\hat{a}$ se factorise par $\boldsymbol{E}_{/S}$

$$\hat{\alpha} : (\hat{\mathrm{Simpl}})_2^o \to \boldsymbol{E}_{/S} \quad , \quad \hat{a} = \sigma.\hat{\alpha}, \tag{9.3}$$

où $\hat{\alpha}$ commute aux produits et où $\sigma : \boldsymbol{E}_{/S} \to \boldsymbol{E}$ est le foncteur source, cf. (1.28). Par ailleurs la restriction de $\hat{\alpha}$ à $(\mathrm{Simpl})_2^o$ se factorise par **le crible $\boldsymbol{R}$ de $\boldsymbol{E}_{/S}$ engendré par r,** 6.10., d'où un carré commutatif dans $(\mathrm{Cat})_{/\boldsymbol{E}}$:

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{R} & \xleftarrow{\alpha} & (\mathrm{Simpl})_2^o \\ {\scriptstyle \iota}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \iota'} \\ \boldsymbol{E}_{/S} & \xleftarrow[\hat{\alpha}]{} & (\hat{\mathrm{Simpl}})_2^o \end{array} \tag{9.4}$$

où ι et ι' sont les foncteurs d'inclusion. Le foncteur $\hat{\alpha}$ est $\boldsymbol{F}$-2-fidèle car il transforme objet final en objet final. Le foncteur α vérifie les hypothèses de 7.10., par définition de $\boldsymbol{R}$, 6.10.. Par définition d'un morphisme de $\boldsymbol{F}$-i-descente, 6.15., on en déduit :

Lemme 9.1. Soit $i \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant i \leqslant 2$. Pour que r soit un morphisme de $\boldsymbol{F}$-i-descente, il faut et il suffit que le foncteur d'inclusion de $(\mathrm{Simpl})_2^o$ dans $(\hat{\mathrm{Simpl}})_2^o$ soit $\boldsymbol{F}$-i-fidèle.

Revenant à la définition, on voit que ceci équivaut également à "ϕ_0 **est un morphisme de** $\hat{\boldsymbol{F}}$**-i-descente**", où $\hat{\boldsymbol{F}}$ désigne la catégorie déduite de $\boldsymbol{F}$ par le changement de base â, (pour ϕ_0, cf.. (8.7)).

Commençons la Traduction annoncée.

Définition 9.2. Soit $\varphi : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$ un foncteur fibrant muni d' un **clivage** c. Soit $r : R \to S$ une flèche de $\boldsymbol{E}$ et soit (R', p_0, p_1) un produit fibré $R \times_S R$. On appelle donnée de recollement sur un objet x de $\boldsymbol{F}_R$ un R'-isomorphisme

$$u : p_1{}^c(x) \to p_0{}^c(x). \tag{9.5}$$

Soit $m : y \to x$ un R-morphisme, soit u (resp. v) une donnée de recollement sur x (resp. sur y). On dira que m est **compatible** avec u et v si l'on a

$$u.p_1{}^c(m) = p_0{}^c(m).v \tag{9.6}$$

On montre aisément que le composé de deux morphismes compatibles avec des données de recollement est compatible avec les données de recollement sur sa source et son but.. Ceci permet de définir la "**catégorie des objets de** $\boldsymbol{F}_R$ **munis d'une donnée de recollement**" (sous-entendu : "relativement à $\varphi : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$, à c, à $r : R \to S$ et à (R', p_0, p_1)"), que l'on note

$$\boldsymbol{Rec}(\boldsymbol{F}/\boldsymbol{E}, c, r) \,. \tag{9.7}$$

Posons $r' = rp_0 = rp_1$, $r' : R' \to S$, et désignons par

$$c_i : p_i{}^c.r^c \to r'^c \,, \quad 0 \leqslant i \leqslant 1, \tag{9.8}$$

les isomorphismes de foncteurs définis par le clivage, (1..8). Pour tout objet z de $\boldsymbol{F}_S$, l'image inverse de z par r

$$z^r = r^c(z) \,, \tag{9.9}$$

est munie d'une donnée de recollement que l'on qualifiera de **naturelle**

$$\delta(z) = c_0(z)^{-1}.c_1(z) \,. \tag{9.10}$$

Si $m : z' \to z$ est un S-morphisme, son image inverse par r, $r^c(m) : r^c(z') \to r^c(z)$ est compatible avec les données de recollement **naturelles** de sa source et de son but car les c_i sont des morphismes de foncteurs. On définit ainsi un **foncteur**

$$\Delta' : \boldsymbol{F}_S \to \boldsymbol{Rec}(\boldsymbol{F}/\boldsymbol{E}, c, r), \ \Delta'(z) = (z^r, \delta(z)). \tag{9.11}$$

Théorème 9.3. Sous les hypothèses de 9.2., pour que r soit un morphisme de $\boldsymbol{F}$-0-descente (resp. $\boldsymbol{F}$-1-descente), il faut et il suffit que le foncteur Δ' soit fidèle (resp. pleinement fidèle).

Nous prouverons ce théorème plus bas. Tirons-en quelques conséquences.

Corollaire 9.4. Sous les hypothèses de 9.2.,

(i) pour que r soit un morphisme de $\boldsymbol{F}$-0-descente il faut et il suffit que le foncteur image inverse $r^c : \boldsymbol{F}_S \to \boldsymbol{F}_R$ soit **fidèle,**

(ii) pour que r soit un morphisme de $\boldsymbol{F}$-1-descente, il faut et il suffit que, pour tout couple (x,y) d'objets de $\boldsymbol{F}_S$, le diagramme d'ensembles ci dessous soit **exact**

$$\text{(9.12)} \qquad \mathrm{Hom}_S(y,x) \xrightarrow{\rho} \mathrm{Hom}_R(y^r,x^r) \overset{\pi_0}{\underset{\pi_1}{\rightrightarrows}} \mathrm{Hom}_{R'}(x^{r'},y^{r'})$$

où l'on a posé :

$$\text{(9.13)} \qquad x^r = r^c(x),\ y^r = r^c(y)\ ,\ x^{r'} = r'^c(x) \quad \text{et} \quad y^{r'} = r'^c(y),\ ,$$

l'application ρ étant définie par

$$\text{(9.14)} \qquad \rho(m) = r^c(m)\ ,\quad m \in \mathrm{Hom}_S(y,x)\ ,$$

et les applications π_i par

$$\text{(9.15)} \qquad \pi_i(m) = c_i(x).\ p_i{}^c(m).\ (c_i(y))^{-1}\ ,\quad m \in \mathrm{Hom}_R(y^r, x^r)\ .$$

[Autrement dit, $\pi_i(m)$ est le transporté par l'isomorphisme de foncteurs c_i de l'image inverse de m par p_i] .

Preuve. Bien entendu, 9.4.(i) résulte immédiatement des définitions, de 5.8., et de (7.6) sans supposer l'existence du produit fibré $R \times_S R$. On rapelle que l'exactitude de (9.12) signifie que ρ induit une bijection entre $\mathrm{Hom}_S(y,x)$ et l'ensemble des $m \in \mathrm{Hom}(y^r,x^r)$ tels que $\pi_0(m) = \pi_1(m)$, lequel est visiblement l'ensemble des $m \in \mathrm{Hom}(y^r,x^r)$ qui sont compatibles avec les données de recollement $\delta(x)$ et $\delta(y)$.

C.Q.F.D.

Il nous reste à démontrer 9.3.. Rappelons que, par définition, 6.15., " r est un morphisme de $\boldsymbol{F}$-i-descente, $0 \leqslant i \leqslant 2$ ", signifie que le foncteur

$$\text{(9.16)} \qquad \mathcal{S}\boldsymbol{F}(S) = \mathbb{H}(\boldsymbol{E}_{/S}, \boldsymbol{F}) \xrightarrow{\iota} \mathbb{H}(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{F}) \quad \text{cf. (6.8),}$$

induit par le foncteur d'inclusion $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{E}_{/S}$ est i-fidèle, où $\boldsymbol{R}$ est le crible engendré par r, 6.10.. Nous allons construire un foncteur

(9.17) $\rho' : \mathbb{H}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{F}) \to \boldsymbol{Rec}(\boldsymbol{F}/\boldsymbol{E}, c, r)$

qui possèdera les propriétés suivantes :

Lemme 9.5. Sous les hypothèses de 9.2.,

(i) le foncteur ρ' est pleinement fidèle,

(ii) le carré ci dessous est commutatif à isomorphisme près

(9.18)
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}\boldsymbol{F}(S) & \xrightarrow{\iota} & \mathbb{H}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{F}) \\ \downarrow{\scriptstyle v_S} & & \downarrow{\scriptstyle \rho'} \\ \boldsymbol{F}_S & \xrightarrow{\Delta'} & \boldsymbol{Rec}(\boldsymbol{F}/\boldsymbol{E}, c, r) \end{array} ,$$

où v_S est le foncteur " valeur en id_S ", $v_S(X) = X(id_S)$,

D'après 5.7., v_S est une équivalence de catégories. Le lemme ci dessus prouvera donc 9.3..

Construisons ρ'. Soit $X \in Ob(\mathbb{H}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{F}))$. Nous noterons

(9.19) $x_i = X((r,p_i)) : x' \to x , \quad 0 \leqslant i \leqslant 1 ,$

la valeur de X sur la flèche $(r,p_i) : r' \to r$ de $\boldsymbol{R}$, cf.(1.28) et supra. Puisque X est un $\boldsymbol{E}$-foncteur, la projection de x_i est l'image de (r,p_i) par **le foncteur source**, c'est à dire p_i. Puisque X transforme tout morphisme de $\boldsymbol{R}$ en un morphisme $\boldsymbol{E}$-cartésien de $\boldsymbol{F}$, x_i est cartésien. D'où un R-isomorphisme

$$\xi_i : x' \to p_i{}^c(x),$$

caractérisé par

(9.20) $c_{p_i}(x).\ \xi_i = X((r,p_i)) , \quad$ cf. (1.6).

Nous poserons

(9.21) $\rho'(X) = (X(r),\ \xi_0(\xi_1)^{-1}).$

C'est évidemment un objet de $\boldsymbol{Rec}(\boldsymbol{F}/\boldsymbol{E},c,r)$.

Si $m : Y \to X$ est une flèche de $\mathbb{H}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{F})$, c'est à dire un $\boldsymbol{E}$-morphisme entre $\boldsymbol{E}$-foncteurs, nous poserons

(9.22) $\rho'(m) = m(r) , \quad m(r) : Y(r) \to X(r) ,$

C'est évidemment un R-morphisme, **il faut vérifier qu'il est compatible avec les données de recollement définies par** (9.20) **et** (9.21). On adopte

pour Y les notations (9.19) à (9.21) où (Y,y,η) remplace (X,x,ξ). Puisque m est un morphisme de foncteurs, on a

$$m(r).Y((r,p_i)) = X((r,p_i)).\, m(r'),\quad 0 < i < 1, \tag{9.23}$$

d'où, d'après (9.20),

$$m(r).c_{p_i}(y).\,\eta_i = c_{p_i}(x).\,\xi_i.m(r'),$$

et d'après (1.7)

$$c_{p_i}(x).p_i{}^{c}(m(r)).\,\eta_i = c_{p_i}(x).\,\xi_i..m(r'),$$

On peut diviser à gauche par le morphisme **cartésien** $c_{p_i}(x)$;

$$p_i{}^{c}(m(r)).\eta_i = \xi_i.m(r'),\ 0 \leqslant i \leqslant 1.$$

Les ξ_i sont des isomorphismes, on a donc

$$m(r') = (\xi_0)^{-1}..p_0{}^{c}(m(r)).\,\eta_0 = (\xi_1)^{-1}.p_1{}^{c}(m(r)).\,\eta_1. \tag{9.24}$$

Il est clair maintenant que les formules ci dessus définissent un foncteur $\rho' : \mathbb{H}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{F}) \to \boldsymbol{Rec}(\boldsymbol{F}/\boldsymbol{E},c,r)$.

Prouvons 9.5.(i). D'après 7.11.(i), où $(\boldsymbol{R},r)$ remplace $(\boldsymbol{E},R)$, le foncteur ρ' est **fidèle.** Montrons qu'il est pleinement fidèle. Soient X et Y deux objets de $\mathbb{H}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{F})$ et soit $m : \rho'(Y) \to \rho'(X)$ une flèche de $\boldsymbol{Rec}(\boldsymbol{F}/\boldsymbol{E},c,r)$. Par définition c'est un R-morphisme $m : Y(r) \to X(r)$ tel que

$$\xi_0(\xi_1)^{-1}p_1{}^{c}(m) = p_0{}^{c}(m)\eta_0(\eta_1)^{-1}\ ,\quad \text{cf. (9.6)}\ , \tag{9.25}$$

où l'on a adopté les notations de (9.19) à (9.21) et des notations analogues pour Y. Posons $m(r) = m$ et désignons par $m(r')$ le R-morphisme (9.24). Les calculs ci dessus montrent que l'on a (9.23). Soit $a : (S.S.Simpl)_1^{o} \to \boldsymbol{R}$ le foncteur défini par $a(q_1^i) = (r,p_i)$, $0 \leqslant i \leqslant 1$. cf.(2.16). La formule (9.23) montre que $m(r)$ et $m(r')$ définissent un $\boldsymbol{E}$ morphisme de $\boldsymbol{E}$-foncteurs $\mu : Y.a \to X.a$. Le foncteur a vérifie l'hypothèse de 7.10.(ii). Par suite, il existe un morphisme $\mu' : Y \to X$ tel que $\mu' * a = \mu$ et donc $\mu'(r) = m$, d'où la conclusion.

Prouvons 9.5.(ii). Soit $Z \in Ob(\mathcal{S}\boldsymbol{F}(S))$ et soit X la restriction de Z à $\boldsymbol{R}$. Posons $z = Z(id_S)$ et adoptons pour X les notations (9.19) à (9.21). Il existe un R-isomorphisme

$$\alpha : x \to z^r\ ,\quad z^r = r^{c}(z)\ , \tag{9.26}$$

caractérisé par

$$c_r(z).\,\alpha = Z(\dot{r})\ , \tag{9.27}$$

où $\dot{r} = (id_S, r)$ est, dans $\boldsymbol{E}_{/S}$, le morphisme final de source r. En effet, l'image de $\dot{r}$ par le foncteur source est $r : R \to S$ et, par suite, $Z(\dot{r})$ est

un morphisme $\boldsymbol{E}$-cartésien de but z et de projection r. Il faut prouver en premier lieu que α est compatible avec la donnée de recollement naturelle de z^r et la donnée de recollement $\xi_0(\xi_1)^{-1}$ de x, ce qui s'exprime par :

$$c_0(z)^{-1}\, c_1(z) p_1{}^c(\alpha) \;=\; p_0{}^c(\alpha)\xi_0(\xi_1)^{-1} \,. \tag{9.28}$$

Pour cela il suffit de prouver, pour i = 0 et i = 1,

$$c_{r'}(z)c_i(z)p_i^c(\alpha)\xi_i \;=\; Z(\dot{r}') \;,\quad \dot{r}' \;=\; (\mathrm{id}_S,\, r') \;. \tag{9.29}$$

car $c_{r'}(z)$ est un morphisme de transport. On applique (1.9) à z et à la relation $r' = rp_i$, puis la définition de $p_i{}^c(\alpha)$, cf. (1.7), puis celle de α, et enfin celle de ξ_i.

Il faut ensuite prouver que l'on définit ainsi un morphisme de foncteurs, ce qui est simple..

La démonstration de 9.5, étant ainsi achevée, pour traduire la $\boldsymbol{F}$-descente **effective** il nous faut évidemment étudier l'image essentielle du foncteur ρ'.. Pour cela nous allons supposer que (R'', q_0, q_1, q_2) est un produit fibré $R \times_S R \times_S R$.

Scholie 9.6. Pour éclairer ce qui va suivre, supposons provisoirement que le clivage c soit un **scindage.** Désignons par $\boldsymbol{F'} = \boldsymbol{F} \times_{\boldsymbol{E}} \boldsymbol{R}$ la $\boldsymbol{R}$-catégorie **scindée** déduite de $\boldsymbol{F}$ par le changement de base et considérons le foncteur composé de

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{F}) \;\xrightarrow{\gamma}\; \boldsymbol{Lim}_{\leftarrow}(\boldsymbol{F'}/\boldsymbol{R}) \;\xrightarrow{\tau}\; \boldsymbol{Tr}(\boldsymbol{F'}/\boldsymbol{R},r)$$

où γ est l'isomorphisme canonique et τ le foncteur de (7.24). Pour tout objet X de $\mathbb{H}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{F})$ soit (x',U) l'image de X par $\tau.\gamma$. Soit u'la valeur de U sur le couple $((r, p_0), (r, p_1))$. Il est clair que l'image de x' par la première projection de $\boldsymbol{F'}$ est x = X(r) et que celle de u' est la donnée de recollement sur x associée à X par le foncteur ρ', (9.21). Soit β: $(\mathrm{S.S.Simpl})_2^o \to \boldsymbol{R}$ la restriction du foncteur α de (9.4). Il vérifie les hypothèses de 7.14.. L'image essentielle de ρ' est donc décrite grâce à 7.14. (ii).

Revenant au cas général, nous allons adapter cette condition en tenant compte des isomorphismes canoniques dû au clivage, cf. (1.8).

Considérons les morphismes

$$r_j : R'' \to R' \quad,\quad 0 \leqslant j \leqslant 2, \tag{9.30}$$

définis, en vertu de la propriété universelle de R', par

(9.31)
$$p_0r_0 = q_1 \qquad p_1r_0 = q_2$$
$$p_0r_1 = q_0 \qquad p_1r_1 = q_2$$
$$p_0r_2 = q_0 \qquad p_1r_2 = q_1 \text{ , cf (7.41) et (9.2),}$$

et posons

(9.32) $$r'' = rq_k \text{ , } \quad 0 \leqslant k \leqslant 2, \quad r'' : R'' \to S,$$

Aux formules (9.31), le clivage associe des isomorphismes de foncteurs, cf. (1.8),

(9.33) $$c_{i,j} : r_j^c . p_i^c \to q_k^c \text{ , } \quad 0 \leqslant i \leqslant 1, \ 0 \leqslant j \leqslant 2,$$

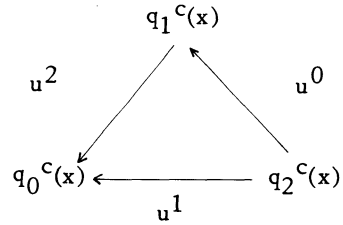
où k est défini en fonction de i et j par $p_i r_j = q_k$ et par (9.31).

Pour tout $x \in Ob(\boldsymbol{F}_R)$ et toute donnée de recollement u sur x, nous poserons :

(9.34) $$u^j = c_{0,j}(x) . r_j^c(u) . (c_{1,j}(x))^{-1} \text{ .}$$

C'est le transporté de $r_j^c(u)$ au moyen des isomorphismes de foncteurs $c_{i,j}$ On a ainsi un triangle dans $\boldsymbol{F}_R$,

(9.35)



Définition 9.7. Soit $\varphi : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$ un foncteur fibrant muni d'un clivage c noté comme il est dit dans 1.6.. Soit $r : R \to S$ une flèche de $\boldsymbol{E}$, soit (R', p_0, p_1) un produit fibré $R \times_S R$ et soit (R'', q_0, q_1, q_2) un produit fibré $R \times_S R \times_S R$. **Une donnée de descente sur un objet x de $\boldsymbol{R}_R$ est une donnée de recollement telle que,** avec les notations (9.30) à (9.34), on ait

(9.36) $$u^2 . u^0 = u^1 \text{ ,}$$

i.e. telle que le triangle (9.35) soit commutatif.

On appelle "catégorie des objets de $\boldsymbol{F}_R$ munis d'une donnée de descente relativement à r" la sous-catégorie pleine de $\boldsymbol{Rec}(\boldsymbol{F}/\boldsymbol{E}, c, r)$ dont les objets sont ceux qui vérifient (9.36). On la note

(9.37) $$\boldsymbol{Desc}(\boldsymbol{F}/\boldsymbol{E}, c, r).$$

Lemme 9.8. Sous les hypothèses de 9.7., pour tout $z \in Ob(\boldsymbol{F}_S)$ la donnée de recollement naturelle de $r^c(z)$, (9.10), est une donnée de descente.

Définition 9.9. Sous les hypothèses de 9.7., une donnée de descente u sur un objet x de $\boldsymbol{F}_R$ sera dite **effective** s'il existe $z \in Ob(\boldsymbol{F}_S)$ et un R-isomorphisme $m : r^C(z) \to x$ qui soit compatible avec u et la donnée de descente naturelle de $r^C(z)$.

Bien entendu 9.8. signifie que le foncteur Δ' de (9.11) se factorise:

$$\Delta : \boldsymbol{F}_S \to \boldsymbol{Desc(F/E},c,r). \tag{9.38}$$

Théorème 9.10. Sous les hypothèses de 9.7., les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) r est un morphisme de $\boldsymbol{F}$-2-descente (on dit également $\boldsymbol{F}$-descente effective)

(ii) le foncteur Δ de (9.38) est une équivalence de catégories.

(iii) r est un morphisme de $\boldsymbol{F}$-descente et, pour tout $x \in Ob(\boldsymbol{F}_R)$, **toute donnée de descente sur x est effective.**

Il est clair que 9.8. et 9.10. résultent du lemme suivant

Lemme 9.11. Sous les hypothèses de 9.7., pour tout $x \in Ob(\boldsymbol{F}_R)$ et toute donnée de recollement u sur x, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) u est une donnée de descente

(ii) il existe $X \in Ob(\mathbb{H}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{F}))$ tel que $\rho'(X) = (x, u)$,

(iii) il existe $X \in Ob(\mathbb{H}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{F}))$ tel que $\rho''(X)$ soit **isomorphe** à (x,u).

Bien entendu, ce lemme implique qu'il existe un carré commutatif à isomorphisme près, induit par (9.18),

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}\boldsymbol{F}(S) & \xrightarrow{\iota} & \mathbb{H}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{F}) \\ {\scriptstyle v_S}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho} \\ \boldsymbol{F}_S & \xrightarrow{\Delta} & \boldsymbol{Desc(F/E},c,r) \end{array} \tag{9.39}$$

dans lequel v_S et ρ sont des équivalences de catégories et sont surjectifs sur les objets.

Remarquons que, d'après 9.6., 7.2., 7.14. et 7.3., ce lemme est démontré lorsque c est un **scindage.** Nous utiliserons une fois de plus la proposition 5.6., grâce au sorite de fonctorialité que voici. (Une démonstration directe utilisant 7.10.(iii) est possible, mais les calculs sont plus longs).

Lemme 9.12. Sous les hypothèses de 9.7., soit encore $\gamma : G \to E$ un foncteur fibrant muni d'un clivage d et soit $\mu : F \to G$ un E-foncteur **cartésien.**

(i) il existe un foncteur

$$\mathbf{Rec}(\mu) : \mathbf{Rec}(F/E,c,r) \to \mathbf{Rec}(G/E,d,r), \tag{9.40}$$

(ii) qui se factorise par les catégories d'objets munis d'une donnée de descente

$$\mathbf{Desc}(\mu) : \mathbf{Desc}(F/E,c,r) \to \mathbf{Desc}(G/E,d,r), \tag{9.41}$$

(iii) de sorte que le diagramme ci dessous soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}(R,F) & \xrightarrow{\mathbb{H}(R,\mu)} & \mathbb{H}(R,G) \\ \downarrow{\scriptstyle \rho_0} & & \downarrow{\scriptstyle \rho} \\ \mathbf{Desc}(F/E,c,r) & \xrightarrow{\mathbf{Desc}(\mu)} & \mathbf{Desc}(G/E,d,r) \end{array} \tag{9.42}$$

où ρ_0 et ρ sont les foncteurs de (9.39).

Construisons $\mathbf{Rec}(\mu)$. Soit $x \in \mathrm{Ob}(F_R)$, muni d'une donnée de recollement $u : p_1{}^c(x) \xrightarrow{\sim} p_0{}^c(x)$. Puisque μ est E-cartésien il existe un R'-isomorphisme

$$t_i : p_i{}^d(\mu(x)) \to \mu(p_i{}^c(x)), \quad 0 \leqslant i \leqslant 1, \tag{9.43}$$

caractérisé par

$$d_{p_i}(\mu(x)) = \mu(c_{p_i}(x)).t_i . \tag{9.44}$$

Il est clair que

$$(t_0)^{-1} . \mu(u). t_1 \tag{9.45}$$

est une donnée de recollement sur $\mu(x)$, d'où l'action de $\mathbf{Rec}(\mu)$ sur les objets. Son action sur les flèches est définie par le fait que, si $m : (y,v) \to (x,u)$ est un morphisme de $\mathbf{Rec}(F/E,c,r)$, $\mu(m)$ est compatible avec les données de recollement que l'on vient de définir sur $\mu(x)$ et $\mu(y)$.

Prouvons maintenant (ii). Soit (x,u) un objet de $\mathbf{Rec}(F/E,c,r)$ et soit $(y,v) = (\mu(x), (t_0)^{-1} \mu(u) t_1)$ son image par $\mathbf{Rec}(\mu)$. Nous allons montrer que v est une donnée de descente, pourvu que u en soit une. Pour cela, définissons u^j comme il est dit dans (9.34) et posons de manière analogue

$$v^j = d_{0,j}(y).r_j{}^d(v). (d_{1,j}(y))^{-1}, \quad 0 \leqslant j \leqslant 2. \tag{9.46}$$

Définissons un R"-isomorphisme $\chi_k : q_k{}^d(y) \to \mu(q_k{}^c(x))$ par

$$d_{q_k}(y) = \mu(c_{q_k}(x)).\ \chi_k \quad , \ 0 \leqslant k \leqslant 2. \tag{9.47}$$

Il nous suffira de prouver que, pour $0 \leqslant j \leqslant 2$, on a

$$(\chi_{k'})^{-1}.\ \mu(u^j).\ \chi_{k''} = v^j , \tag{9.48}$$

où k' (resp. k") est défini par $p_0 r_j = q_{k'}$ (resp. $p_1 r_j = q_{k''}$).

Pour cela, introduisons, pour tout (i,j), $0 \leqslant i \leqslant 1$, $0 \leqslant j \leqslant 2$, un R" isomorphisme $\rho_{ij} : r_j{}^d(\mu(p_i{}^c(x))) \to \mu(r_j{}^c(p_i{}^c(x)))$, caractérisé par

$$d_{r_j}(\mu(p_i{}^c(x))) = \mu(c_{r_j}(p_i{}^c(x))).\ \rho_{ij} \quad . \tag{9.49}$$

D'après (1.7), on a

$$r_j{}^d(\mu(u)) = (\rho_{0j})^{-1}\ .\ \mu(r_j{}^c(u)).\ \rho_{1j} , \ 0 \leqslant j \leqslant 2. \tag{9.50}$$

Puisque $r_j{}^d$ est un foncteur, on déduit de la définition de v, (9.45), et de la relation ci dessus la relation

$$r_j{}^d(v) = (\rho_{0j}.r_j{}^d(t_0))^{-1}\ .\ \mu(r_j{}^c(u)).\ r_j{}^d(t_1).\ \rho_{1j} \ . \tag{9.51}$$

Il nous reste à montrer que, pour tout (i,j), $0 \leqslant i \leqslant 1$, $0 \leqslant j \leqslant 2$, on a

$$\chi_k.d_{i,j}(y) = \mu(c_{i,j}(x)).\ \rho_{ij}\ .\ r_j{}^d(t_i) , \tag{9.52}$$

où k est défini par $p_i r_j = q_k$, (9.31).

Ayant noté que les deux membres de (9.52) ont pour but $\mu(q_k{}^c(x))$, on les compose tous deux avec $\mu(c_{q_k}(x))$ et on prouve que les composés obtenus sont égaux. Le membre de gauche donne, par définition de χ_k (9.47), et par définition de $d_{i,j}$, (1.9):

$$d_{p_i}(y).\ d_{r_j}(p_i{}^d(y))$$

et le membre de droite, par définition de $c_{i,j}$ et de ρ_{ij}

$$\mu(c_{p_i}(x)).\ d_{r_j}(\mu(p_i{}^c(x))).\ r_j{}^d(t_i),$$

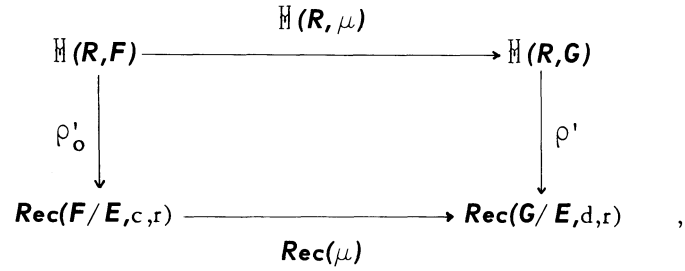
d'où, par définition du foncteur $r_j{}^c$, (1.7), en comparant,

$$d_{p_i}(y).\ d_{r_j}(p_i{}^d(y)) = \mu(c_{p_i}(x)).\ t_i.\ d_{r_j}(p_i{}^d(y)). \tag{9.53}$$

La conclusion résulte alors de la définition de t_i.

Ayant ainsi prouvé 9.12.(ii), nous laissons au lecteur le soin de vérifier que, sous les hypothèses de 9.12., le carré ci dessous est commutatif

(9.54)



où ρ'_o et ρ' sont les foncteurs de (9.17).

Il est clair que 9.12.(iii) en résultera quand on aura prouvé que le foncteur ρ'_o de 9.17. se factorise par $\mathbf{Desc}(F \to E,c,r)$, autrement dit que, dans 9.11.,(ii) $\Longrightarrow$(i). Considérons le foncteur $vF : \Phi\mathcal{S}F \to F$ de (5.21). Il est pleinement fidèle et **surjectif** sur les objets. Il existe donc un E-foncteur cartésien $a : F \to \Phi\mathcal{S}F$ tel que le composé $vF.a$ soit **égal** au foncteur identique de F. Dans le carré (9.54), où le foncteur vF remplace μ, on sait donc que $\mathbb{H}(R,vF)$ est **surjectif** sur les objets, (bien entendu c'est une équivalence car vF est une E-équivalence). Le foncteur ρ' relatif à $\Phi\mathcal{S}F$ vérifie 9.11., car $\Phi\mathcal{S}F$ est **scindée.** De 9.12.(ii), on déduit donc que, dans 9.11.,(ii) entraîne (i). Considérons maintenant le carré (9.42), où vF remplace μ. Puisque ρ_o et $\mathbb{H}(R,u)$ sont des équivalences et que ρ est pleinement fidèle, $\mathbf{Desc}(vF)$ est pleinement fidèle. Pour achever de prouver 9.11., il suffit de prouver que $\mathbf{Rec}(vF)$ est pleinement fidèle, ce qui résulte aisément du fait que vF est une E-équivalence, de (9.45) et de (9.6). En effet, grâce à l'existence de $a : F \to \Phi\mathcal{S}F$, on saura que $\mathbf{Rec}(vF)$ et $\mathbf{Desc}(vF)$ **sont pleinement fidèles et surjectifs sur les objets,** en vertu des formules

$$\mathbf{Rec}(\nu).\mathbf{Rec}(\mu) = \mathbf{Rec}(\nu\mu) \tag{9.55}$$

$$\mathbf{Desc}(\nu).\mathbf{Desc}(\mu) \quad \mathbf{Desc}(\mu) \tag{9.56}$$

dans lesquelles $\eta : H \to E$ est un foncteur fibrant muni d'un clivage e et où $\nu : G \to H$ est un E-foncteur cartésien.

C.Q.F.D.

Remarque 9.13. La commutativité de (9.42) **caractérise** le foncteur $\mathbf{Desc}(u)$, En effet, ρ est pleinement fidèle et surjectif sur les objets. On peut préciser un peu mieux les propriétés de ρ :

Corollaire 9.14. (Transfert d'une donnée de descente). Sous les

hypothèses de 9.11., soit $x \in Ob(\boldsymbol{F}_R)$, soit u une donnée de recollement sur x et soit m : y → x un R-isomorphisme.

(i) il existe une donnée de recollement v sur y, **caractérisée** par le fait que m est compatible avec u et v,

(ii) si u est une donnée de descente, il en est de même de v.

Ceci résulte de 7.3. et de 9.6. lorsque le clivage est un scindage. Le cas général s'en déduit grâce aux propriétés du foncteur $v\boldsymbol{F} : \mathfrak{P}\mathfrak{S}\boldsymbol{F} \to \boldsymbol{F}$.

Corollaire 9.15. Sous les hypothèses de 9.7., soit $\hat{a} : (\hat{\text{Simpl}})_2^o \to \boldsymbol{E}$ le foncteur de (9.1) et soit $\hat{c}$ le clivage de $\hat{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{F} \times_{\boldsymbol{E}} (\text{Simpl})_2^o$ déduit de c par le changement de base â. Il existe un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} & \Delta & \\ \boldsymbol{F}_S & \longrightarrow & \boldsymbol{Desc}(\boldsymbol{F}/\boldsymbol{E}, c, r) \\ \uparrow \pi \quad \approx & & \approx \quad \uparrow \pi' \\ & \Delta' & \\ \boldsymbol{F}_\emptyset & \longrightarrow & \boldsymbol{Desc}(\hat{\boldsymbol{F}}/(\hat{\text{Simpl}})_2^o, \hat{c}, \phi_0) \end{array} \tag{9.57}$$

où les flèches horizontales sont définies par (9.38) et où les flèches verticales sont les **isomorphismes** induits par la première projection de $\hat{\boldsymbol{F}}$.

Evidemment. Rappelons simplement que $\phi_0 : [0, 0] \to \emptyset$ est, dans $(\text{Simpl})_2^o$, le morphisme final de source $[0, 0]$, (8.7). On notera que $(\text{Simpl})_2^\delta$ est le crible de $(\hat{\text{Simpl}})_2^o$ engendré par ϕ_0. Par suite, en composant le foncteur ρ de (9.39) relatif à $\hat{\boldsymbol{F}}$ et à ϕ_0 et le foncteur π' de (9.57), on obtient une équivalence de catégories, surjective sur les objets :

$$\omega : \mathbb{H}((\text{Simpl})_2^o, \boldsymbol{F}) \to \boldsymbol{Desc}(\boldsymbol{F}/\boldsymbol{E}, c, r). \tag{9.58}$$

En composant celle-ci avec le foncteur induit par composition avec le foncteur α de (9.4), on retrouve évidemment le foncteur ρ de (9.39).

Le foncteur ρ de (9.39) et le foncteur ω de (9.58) seront utilisés pour établir des résultats de fonctorialité des catégories $\boldsymbol{Desc}(*)$. On utilisera à cette fin le lemme 9.11. et le suivant.

Lemme 9.16. Sous les hypothèses de 9.7., soit $\boldsymbol{R}$ le crible de $\boldsymbol{E}_{/S}$ engendré par r et soient X et Y deux objets de $\mathbb{H}(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{F})$. Les conditions suivantes sont équivalentes

(i) $\rho(X) = \rho(Y)$

(ii) on a $X(r) = Y(r)$ (r est un objet de $\boldsymbol{R}\ldots$) et il existe un isomorphisme (dans $\mathbb{H}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{F})$) $m : Y \to X$ tel que m(r) soit le morphisme identique de X(r).

Ceci résulte trivialement de la définition de ρ, cf. (9.21) et du fait qu'il est pleinement fidèle.. On a un lemme analogue pour ω.

Pour terminer ce paragraphe, démontrons le "**lemme des diagonales**".

Lemme 9.17. Sous les hypothèses de 9.7., considérons les applications définies par la propriété universelle du produit :

$$d : R \to R' \quad , \quad p_0 d = p_1 d = id_R, \quad \text{et} \tag{9.59}$$

$$d' : R \to R'' \quad , \quad q_0 d' = q_1 d' = q_2 d' = id_R . \tag{9.60}$$

(i) Supposons que le foncteur image inverse d^c relatif à d soit **fidèle.** Pour que r soit un morphisme de $\boldsymbol{F}$-1-descente il faut et il suffit que le foncteur image inverse $r^c : \boldsymbol{F}_S \to \boldsymbol{F}_R$ soit pleinement fidèle..

(ii) Supposons que le foncteur image inverse d^c soit pleinement fidèle et que le foncteur image inverse d'^c soit fidèle. Pour que r soit un morphisme de $\boldsymbol{F}$-2-descente, il faut et il suffit que le foncteur image inverse r^c soit une équivalence de catégories.. De plus, tout objet x de de $\boldsymbol{F}_R$ est muni d'une donnée de descente unique.

Soit $\boldsymbol{R}$ le crible de $\boldsymbol{E}_{/S}$ engendré par r. Sous les hypothèses de (i) (resp. (ii)), le foncteur "valeur en R" $v' : \mathbb{H}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{F}) \to \boldsymbol{F}_R$, $X \rightsquigarrow X(r)$, est pleinement fidèle (resp. une équivalence). En effet, on peut appliquer 7.15. au foncteur $\alpha : (\mathrm{Simpl})^o_2 \to \boldsymbol{R}$ qui figure dans (9.4). On en déduit les assertions concernant r^c en utilisant le carré ci-dessous, commutatif à isomorphisme près d'après 5.8.,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}\boldsymbol{F}(S) = \mathbb{H}(\boldsymbol{E}_{/S},\boldsymbol{F}) & \xrightarrow{\ \iota\ } & \mathbb{H}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{F}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle v} & & \Big\downarrow{\scriptstyle v'} \\ \boldsymbol{F}_S & \xrightarrow[r^c]{} & \boldsymbol{F}_R \end{array} \quad , \tag{9.61}$$

où ι est induit par l'inclusion de $\boldsymbol{R}$ dans $\boldsymbol{E}_{/S}$ et où v est le foncteur valeur en id_S, qui est une équivalence.

Pour prouver la seconde assertion de (ii), notons que le foncteur v' est égal au composé $\lambda\rho$, où ρ est le foncteur de (9.39) et où λ: $\mathbf{Desc}(F/E,c,r) \to F_R$ est le foncteur qui, à tout $x \in Ob(F_R)$ munie d'une donnée de descente u, associé x. Puisque v' et ρ sont des équivalences, il en est de même de λ. De plus, λ est surjectif sur les objets d'après 9.14.. D'où l'existence, pour tout $x \in Ob(F_R)$, d'une donnée de descente u sur x. Si v en est une autre, puisque λ est pleinement fidèle, le morphisme id_x est compatible avec u et v, ce qui prouve que u = v, cf. (9.6).

C.Q.F.D.

9 - b) Relatives à une famille de morphismes.

Le premier procédé pour ramener l'étude d'une famille à celle d'un seul morphisme utilise les catégories de familles d'objets de 7.d). Il ne suppose aucune hypothèse sur E. Le second procédé, exposé dans 9-c), suppose que les sommes directes existent dans E et possèdent certaines propriétés relativement à F, 9.25. et 9.27.. Il ne permet pas d'étendre commodément aux familles les résultats que nous exposerons le plus souvent pour les morphismes. Cependant, les résultats généraux étant acquis grâce au premier procédé, le second est presque toujours utilisable en pratique et permet de remplacer une famille de morphismes par le morphisme somme (cf. 9.28. et 9.29.), sans construction auxiliaire .

Lemme 9.18. Soit $\varphi : F \to E$ un foncteur fibrant et soit $\mathcal{R} = (r_i : R_i \to S)_{i \in I}$, $r_i \in Fl(E)$, une famille de flèches de E de même but S. Désignons par $\mathrm{r}: \rho \to \sigma$ la flèche de Fam(E) qui lui correspond. Soit $i \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant i \leqslant 2$. Les conditions suivantes sont équivalentes ;

(i) $\mathcal{R}$ est une famille de F-i-descente (resp. universelle)

(ii) r est un morphisme de $\mathbf{Fam}(F)$-i-descente (resp. universelle).

Il est clair que $\mathbf{Fam}(E)_{/\sigma}$, munie de son foncteur source, s'identifie à la catégorie $\mathbf{Fam}(E_{/S})$.

Par ailleurs, si R est le crible de $E_{/S}$ engendré par $\mathcal{R}$, l'identification précédente induit un isomorphisme entre $\mathbf{Fam}(R)$ et le crible de $\mathbf{Fam}(E)_{/\sigma}$ engendré par r. D'où la conclusion, par 7.22..

Le choix, dans $\mathbf{Fam}(E)$, d'un produit fibré $(\rho/\sigma)^{n+1}$, $n \geqslant 0$, équivaut au choix, pour tout $\mathrm{i} = (i_o, \ldots, i_n) \in I^{n+1}$, d'un produit fibré $R_{\mathrm{i}} = R_{i_o} \times_S \ldots \times_S R_{i_n}$, la p-ième projection de $(\rho/\sigma)^{n+1}$ étant définie

par la famille des p-ièmes projections $R_i \to R_{i_p}$. Nous utiliserons ces produits pour $n = 1$ et $n = 2$ et, si $i = (i,j)$, $^p i \in I^2$, (resp. si $i = (i,j,k)$, $i \in I^3$), nous utiliserons également les notations $R_i = R_{ij}$ (resp. $R_i = R_{ijk}$). Nous désignerons respectivement par $\boldsymbol{F}_i$, $\boldsymbol{F}_{ij}$ et $\boldsymbol{F}_{ijk}$ les catégories fibres de $\boldsymbol{F}$ en R_i, R_{ij} et R_{ijk}, ou encore par $\boldsymbol{F}_i$ la catégorie fibre de $\boldsymbol{F}$ en R_i.

Définition 9.19. Sous les hypothèses de 9.18., soit encore c un clivage de φ et soit c' le clivage de $\boldsymbol{Fam}(\varphi)$ qui s'en déduit par 7.21.. Soient enfin des produits fibrés, dans $\boldsymbol{Fam(E)}$, $\rho' = (\rho/\sigma)^2$ et $\rho'' = (\rho/\sigma)^3$.

(i) soit $x = (x_i)_{i\in I}$, $x_i \in Ob(\boldsymbol{F}_i)$, une famille. On appelle donnée de recollement (resp. de descente) sur x relativement à $\mathbb{R}$ une donnée de recollement (resp. de descente) sur x relativement à r, à $\boldsymbol{Fam}(\varphi)$ et à c'.

(ii) soit $z \in Ob(\boldsymbol{F}_S)$, on appellera donnée de descente **naturelle** sur la famille $(r_i^c(z))_{i\in I}$, la donnée de descente naturelle définie par (9.10) où r remplace r et $\boldsymbol{Fam}(\varphi)$ remplace φ.

(iii) On désigne par

$$\Delta : \boldsymbol{F}_S \to \boldsymbol{Desc}(\boldsymbol{F}/\boldsymbol{E}, c, \mathbb{R}) \tag{9.62}$$

le foncteur (9.38) relatif $\boldsymbol{Fam}(\varphi)$, à c' et à r.

Cette définition appelle quelques observations. Tout d'abord, il est clair que, dans (i), la famille x est un objet de la catégorie fibre de $\boldsymbol{Fam(F)}$ en ρ. D'après le calcul du clivage de $\boldsymbol{Fam}(\varphi)$, 7.21., une donnée de recollement sur x est une famille de R_{ij}-isomorphismes $u_{ij} : x_i^j \to x_j^i$, $(i,j) \in I \times I$, où x_i^j (resp. x_j^i) désigne l'image inverse de x_i (resp. x_j) par la première (resp. seconde) projection de R_{ij}.

Si, pour tout $(i,j,k) \in I^3$, on désigne respectivement par u_{ij}^k, $u_i^j{}_k$ et $u^i{}_{jk}$ l'image inverse de u_{ij}, u_{ik} et u_{jk} par le morphisme naturel de R_{ijk} dans R_{ij}, R_{ik} et R_{jk}, la condition pour qu'une donnée de recollement soit une donnée de descente s'écrit, en ne tenant pas compte des isomorphismes de transitivité de l'image inverse,

$$u_{ij}^k . u^i{}_{jk} = u_i^j{}_k \quad , \quad (i,j,k) \in I^3, \text{ cf. (9.36).} \tag{9.63}$$

Enfin, on notera que, dans (ii) et (iii), on a sous-entendu l'isomorphisme canonique (7.53) entre $\boldsymbol{F}_S$ et $\boldsymbol{Fam(F)}_\sigma$ et que la famille $(r_i^c(z))_{i\in I}$ des images inverses de z par les r_i est l'image inverse de z par $\mathrm{r} : \rho \to \sigma$.

Pour passer d'une section cartésienne à une famille munie d'une donnée de descente, on utilisera le foncteur

$$\rho : \mathbb{H}(R,F) \to \mathbf{Desc}(F/E, c, \mathbb{R}), \tag{9.64}$$

composé de celui qui figure dans (9.39), relatif à $\mathbf{Fam}(\varphi)$ et à Γ, et du foncteur déduit de la fonctorialité de $\mathbf{Fam}(\varphi)$:

$$\mathbb{H}(R,F) \to \mathbb{H}(R', \mathbf{Fam}(F)),$$

où R' désigne le crible de $\mathbf{Fam}(E)_{/\sigma}$ engendré par Γ,

Il est pleinement fidèle et surjectif sur les objets. Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer et de démontrer les analogues de 9.3., 9.4., 9.9. et 9.10., Bien entendu, si l'ensemble d'indices de la famille $\mathbb{R}$ n'a qu'un élément, les définitions que nous venons de donner coïncident avec celles du paragraphe précédent.

Remarque 9.20. Signalons que l'on peut reconstruire l la catégorie $\mathbf{Desc}(F/E, c, \mathbb{R})$ à l'aide de 7.26. et 7.28.. On considère **l'ensemble simplicial** $\hat{K} : (\hat{\mathrm{Simpl}})_2^o \to (\mathrm{Ens})$ défini par $\hat{K}(\Delta_n) = I^{n+1}$, la catégorie **coscindée** $\hat{K} \to (\hat{\mathrm{Simpl}})_2^o$, opposée de la catégorie scindée $\Phi(\varepsilon.\hat{K})$ décrite par 5-a), où ε est défini dans (7.52), **et enfin le foncteur** $\hat{\kappa} : \hat{K} \to E$ défini par $\hat{\kappa}(i) = R_i$, $i \in I^n$, (notations qui précèdent 9.19). (voir également (7.60) et infra).

On considère la catégorie F', déduite de F par le changement de base $\hat{\kappa}$ et la catégorie

$$\hat{F}_{\mathbb{R}} = \Pi_{\hat{K}/(\hat{\mathrm{Simpl}})_2^o}(F'/\hat{K}).$$

D'après 7.28., $\hat{F}_{\mathbb{R}}$, munie de son clivage, est isomorphe à la catégorie déduite de $\mathbf{Fam}(F)$ par le changement de base $\hat{\alpha} : (\hat{\mathrm{Simpl}})_2^o \to \mathbf{Fam}(E)$ associé à $\hat{K}$ et $\hat{\kappa}$. D'après 9.15., appliqué à $\hat{\alpha}$, on obtient ainsi un procédé de description du foncteur (9.62) qui ne fait pas intervenir $\mathbf{Fam}(\varphi)$.

Exemple 9.21. Soit E la catégorie des ouverts d'un espace topologique S et soit F la E-catégorie fibrée des "espaces topologiques au dessus d'un ouvert U de S". Un objet de F est donc une application continue $x : X \to U$, où U est un ouvert de S. Les foncteurs images inverses sont alors les foncteurs "restriction à un ouvert", ce qui montre que F est **scindée** sur E, i.e. que l'on a transitivité vraie des images inverses. Si $(R_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de S dire que la famille des morphismes d'inclusion des R_i dans S est de F-l-descente signifie simplement que, pour tout couple (X,Y) d'espaces topologiques au dessus de S et

et toute famille $u_i : Y^i \to X^i$, $i \in I$, de R_i-morphismes entre les restrictions de X et de Y aux R_i, coïncidant dans les $R_i \cap R_j$, il existe un S-morphisme unique $u : Y \to X$, se restreignant suivant les u_i. Ce qui est vrai. Il est même vrai que cette famille est de $\boldsymbol{F}$-2-descente. En effet, la condition que toute donnée de descente sur une famille $Y_i \to R_i$, $i \in I$, d'espaces topologiques au dessus des R_i, soit effective est vérifiée, comme on voit en recollant les Y_i le long des Y_{ij} (restriction de Y_i à $R_i \cap R_j$) comme il est dit dans [N. B] .

9 - c) *Descente et sommes directes.*

Lemme 9.22. Soit $\boldsymbol{E}$ une catégorie, soit $S \in Ob(\boldsymbol{E})$ et soit $(s_i : S_i \to S)_{i \in I}$ une famille de flèches de $\boldsymbol{E}$ possédant la propriété universelle des sommes directes. Supposons que, pour tout $i \in I$, s_i soit un **monomorphisme.** Supposons de plus que, pour tout $(i,j) \in I \times I$, $i \neq j$ le produit fibré $S_i \times_S S_j$ existe et soit un objet initial de $\boldsymbol{E}$. Alors, pour tout $\underline{i} = (i_0, i_1, \ldots, i_n) \in I^{n+1}$, $n \geq 0$, le produit fibré $S_{\underline{i}} = S_{i_0} \times_S S_{i_1} \ldots \times_S S_{i_n}$ existe dans $\boldsymbol{E}$. Si $i_0 = i_1 = \ldots = i_n$, il est égal à S_{i_0}, les projections structural étant l'application identique de S_{i_0}. Sinon, c'est un objet initial de $\boldsymbol{E}$.

Preuve. Pour tout $i \in I$, s_i est un monomorphisme, d'où l'existence et le calcul de $S_{\underline{i}}$ dans le premier cas. Dans le second cas, on remarque que, si $u : A \to B$ est un monomorphisme et I un objet initial de $\boldsymbol{E}$, le carré

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\iota} & I \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ A & \xrightarrow{u} & B \end{array}$$

est un produit fibré, les morphismes autres que u étant évidemment les morphismes initiaux; (donc $\iota = id_I$). En effet, il suffit de prouver que, pour tout $X \in Ob(\boldsymbol{E})$ et tout $(x,x') \in Hom(X,A) \times Hom(X,I)$ vérifiant $\beta x' = ux$, on a $\alpha x' = x$. Or $\beta = u\alpha$, car I est objet initial. D'où $u\alpha x' = ux$, d'où la conclusion, car u est un monomorphisme.

Définition 9.23. On dira qu'une somme directe est disjointe si elle vérifie les hypothèses du lemme précédent.

Proposition 9.24. Soit $\varphi : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$ un foncteur fibrant. Soit $\sigma = (s_i : S_i \to S)_{i \in I}$, $s_i \in Fl(\boldsymbol{E})$, une famille telle que S soit **somme directe disjointe** des S_i. Supposons que la catégorie fibre du foncteur φ en un objet initial de $\boldsymbol{E}$ soit équivalente à une catégorie ponctuelle. Désignons par

$$S^* : \boldsymbol{F}_S \to \prod_{i\in I} \boldsymbol{F}_{S_i}$$

le foncteur déduit, par la propriété universelle du produit, des foncteurs image inverse

$$S^*_i : \boldsymbol{F}_S \to \boldsymbol{F}_{S_i} , \quad i\in I ,$$

relatifs aux s . Pour que la famille σ soit $\boldsymbol{F}$-r-descente, $0 \leqslant r \leqslant 2$, il faut et il suffit que le foncteur S^* soit r-fidèle, c'est à dire fidèle, pleinement fidèle ou une équivalence, selon que n = 0,1 ou 2.

Désignons par $S : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}$ la flèche de $\boldsymbol{Fam(E)}$ qui est définie de manière évidente par σ. D'après 9.18., pour que σ soit une famille de $\boldsymbol{F}$-r-descente, il faut et il suffit que S soit une flèche de $\boldsymbol{Fam(F)}$-r-descente. Puisque S est une somme directe **disjointe,** le carré $\mathcal{S}''$ et le cube $\mathcal{S}'''$ de $(\mathcal{S}'/\mathcal{S})$ existent dans $\boldsymbol{Fam(E)}$. Avec les notations qui précèdent 9.19., on a $\mathcal{S}'' = (S_j)_{j\in I\times I}$ et $\mathcal{S}''' = (S_j)_{j\in I\times I\times I}$, l'explicitation des projections structurales étant laissée au lecteur. Utilisons le lemme des diagonales, 9.17.. L'application diagonale

$$\delta : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'' , \quad \delta\in \mathrm{Fl}(\boldsymbol{Fam(E)}) ,$$

est définie par l'application $I \to I\times I$, $i \rightsquigarrow (i,i)$, et par les morphismes identiques des S_i, $i\in I$. D'après 7.21., le foncteur image inverse correspondant à δ, relatif à $\boldsymbol{Fam(\varphi)}$, s'interprète, modulo les isomorphismes de (7.53)., comme le produit des foncteurs images inverses relatifs à φ et aux morphismes identiques des S_i, lesquels sont des équivalences de catégories. Désignons-le par

$$\delta^* : \prod_{(i,j)\in I\times I} \boldsymbol{F}_{ij} \to \prod_{i\in I} \boldsymbol{F}_i$$

où $\boldsymbol{F}_i$ ***(resp.*** $\boldsymbol{F}_{ij}$***)*** désigne la fibre du foncteur φ en S_i (resp. en $S_i\times_S S_j$). Le foncteur δ^* est une équivalence de catégories, les facteurs $\boldsymbol{F}_{ij}$, $i \neq j$, de sa source sont équivalentes à des catégories ponctuelles. En appliquant le même raisonnement à la seconde diagonale, on voit que les hypothèses de 9.17.(ii) sont satisfaites. D'où la conclusion, puisque le foncteur S^* de l'énoncé s'interprète comme le foncteur image inverse relatif à $\boldsymbol{Fam(\varphi)}$ et au morphisme S de $\boldsymbol{Fam(E)}$.

C.Q.F.D.

Définition 9.25. Soient $\boldsymbol{E}$ une catégorie, S un objet de $\boldsymbol{E}$ et $\mathcal{S} = (s_i : S_i \to S)_{i\in I}$, $s_i\in \mathrm{Fl}(\boldsymbol{E})$, une famille. On dira que S est somme

directe **universelle** des S_i , si la famille $\mathcal{S}$ est quarrable et si, pour tout $u \in Fl(\boldsymbol{E})$, $u : S' \to S$, la famille $\mathcal{S}^u$, déduite de $\mathcal{S}$ par le changement de base u , 6.10., possède la propriété universelle des sommes directes.

Remarque 9.26. Dans la catégorie des ensembles, des préschémas ou des espaces topologiques, les sommes directes existent et sont disjointes et universelles. Si X est un espace topologique, dans la catégorie des ouverts de X, les sommes directes existent (réunion) et sont universelles. Elles ne sont pas disjointes. Dans un autre ordre d'idées, dans une catégorie munie d'un objet nul, les sommes directes ne peuvent être universelles que si tout objet est nul. En effet, soient $\boldsymbol{E}$ une catégorie, I un objet initial de $\boldsymbol{E}$ et $u : A \to I$ un morphisme. Puisque I est objet initial, on a $I = I \coprod I$, les morphismes structuraux étant les morphismes identiques. Si cette somme directe est **universelle**, par le changement de base $u : A \to I$, on en déduit que A est somme directe de A et de A, les morphismes structuraux étant id_A. Donc, puisque $\mathrm{Hom}(A,I) \neq \emptyset$, A est objet initial de $\boldsymbol{E}$ donc est isomorphe à I. Si maintenant on suppose que I est également un objet final, on en déduit que tout objet de E, est isomorphe à I.

Proposition 9.27. Soit $\varphi : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$ un foncteur **fibrant.** Supposons que, dans $\boldsymbol{E}$, les sommes directes soient disjointes et universelles. Soit r un entier, $1 \leqslant r \leqslant 2$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) pour toute somme directe de $\boldsymbol{E}$, $S = \coprod_{i \in I} S_i$, la famille des morphismes structuraux $(s_i : S_i \to S)_{i \in I}$ est de $\boldsymbol{F}$-r-descente universelle ,

(ii) pour toute somme directe de $\boldsymbol{E}$, $S = \coprod_{i \in I} S_i$ le foncteur produit des foncteurs images inverses relatifs aux morphismes structuraux

$$\boldsymbol{F}_S \to \prod_{i \in I} \boldsymbol{F}_{S_i}$$

est r-fidèle, i.e. pleinement fidèle ou une équivalence, selon que r = 1 ou 2.

Preuve. Remarquons déjà que **l'on obtient une condition équivalente à** (i) **en y suprimant l'adjectif "universelle".** En effet, on a supposé que les sommes directes sont universelles. La proposition est une conséquence évidente de 9.24., lorsqu'il existe, dans $\boldsymbol{E}$, un objet initial et lorsque la catégorie fibre de cet objet est équivalente à une catégorie

ponctuelle. Dans ce cas, la proposition est également valable pour r = 0. Par ailleurs, s'il n'existe, dans $\boldsymbol{E}$, que des sommes directes dont l'ensemble d'indices a pour cardinal 1, (isomorphismes), les deux conditions sont trivialement vérifiées. S'il en existe d'autres, il existe un objet initial I, car les sommes directes sont supposées disjointes. Celui-ci est alors somme directe de la famille vide d'objets de $\boldsymbol{E}$. Chacune des deux conditions de l'énoncé, appliquée à cette somme, entraîne que la catégorie fibre en I est équivalente à une catégorie ponctuelle, d'où la conclusion.

Théorème 9.28. Soit $\varphi: \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$ un foncteur fibrant. Supposons que, dans $\boldsymbol{E}$, les sommes directes indexées par un élément de l'univers $\mathbb{U}$ existent, soient disjointes, universelles et des familles de $\boldsymbol{F}$-descente effective, 9.23., 9.25., et 9.27.. Soit $p \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant p \leqslant 2$. Pour qu'une famille $\mathbb{R} = (r_i : R_i \to S)_{i \in I}$ soit de $\boldsymbol{F}$-p-descente (resp. universelle) il faut et il suffit que le morphisme somme des r_i, $r : R \to S$, $R = \coprod_{i \in I} R_i$ soit de $\boldsymbol{F}$-p-descente (resp. universelle).

Grâce à 9.18., on raisonne dans $\boldsymbol{Fam(E)}$. On note $\mathbb{r}$ la flèche de $\boldsymbol{Fam(E)}$ correspondant à $\mathbb{R}$, $\mathbb{S}$ celle qui correspond aux morphismes structuraux $s_i : R_i \to R$ et r celle qui correspond à r. On a $r\mathbb{S} = \mathbb{r}$ et on sait que $\mathbb{S}$ est une flèche de $\boldsymbol{Fam(F)}$-2-descente universelle. On conclut par 6.27..

Corollaire 9.29. Sous les hypothèses de 9.28., supposons que les produits fibrés existent dans $\boldsymbol{E}$ et soit c un clivage de φ.

(i) pour tout $x \in Ob(\boldsymbol{F}_R)$, il existe une correspondance bijective entre les données de recollement sur x relatives à r et les données de recollement sur la famille $(s_i^c(x))_{i \in I}$, relatives à $\mathbb{R}$;

(ii) cette bijection en induit une entre les données de descente et entre les données de descente qui sont effectives.

Nous adopterons les notations qui précèdent 9.19.. Soit R'(resp. R") un carré (resp. cube) de R sur S. Puisque les sommes directes sont universelles, la famille des morphismes naturels $(s_j)_{j \in I^n}$, $s_j : R_j \to (R/S)^n$ possède la propriété universelle des sommes directes et, par suite, le produit des foncteurs image inverse relatifs aux s_j est une équivalence. Pour prouver (i), on associe, à toute donnée de recollement u sur x, la donnée de recollement $u_{ij} = s_j^c(u)$, $\mathbb{i} = (i,j) \in I \times I$, relative à $\mathbb{R}$. [Pour simplifier on ne tient pas compte des isomorphismes de transitivité de l'image inverse.].

Pour prouver (ii), on interprète en termes de sections cartésiennes l'application induite sur les données de descente.

Indiquons le principe de la démonstration. Soit u une donnée de descente sur $x \in Ob(\boldsymbol{F}_R)$. Il existe un objet X de $\mathbb{H}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{F})$, [où $\boldsymbol{R}$ est le crible de $\boldsymbol{E}_{/S}$ engendré par r], tel que $\rho(X) = (x,u)$, cf. (9.39) et (9.21). Soit X' la restriction de X au crible $\boldsymbol{R}'$ de $\boldsymbol{E}_{/S}$ engendré par $\mathbb{R}$. Pour tout $i \in I$, on a un R_i-isomorphisme

$$t_i : X'(r_i) \to s_i^c(x),$$

caractérisé par

$$c_{s_i}(x).t_i = X((r,s_i)) \quad , \quad \text{cf, (1.6)},$$

car X transforme tout morphisme de $\boldsymbol{R}$ en un morphisme $\boldsymbol{E}$-cartésien de $\boldsymbol{F}$. Par ailleurs, X' définit une donnée de descente sur la famille des $X'(r_i)$, d'après (9.62). Grâce aux t_i, on la "transfère" à la famille des $s_i^c(x)$. [lemme 9.14. appliquée à $\boldsymbol{Fam}(\varphi)$]. On trouve la donnée de recollement définie dans (i). Celle-ci est donc une donnée de descente. Pour conclure, on note que le foncteur restriction $\mathbb{H}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{F}) \to \mathbb{H}(\boldsymbol{R}',\boldsymbol{F})$ est une équivalence, cf. preuve de 6.27., et aussi que u (resp. u_{ij}) est effective si, et seulement si, X (resp. X') se prolonge à $\boldsymbol{E}_{/S}$.

C.Q.F.D.

10 - Propriétés des morphismes de descente.

Les deux résultats importants sont le théorème de comparaison, 6.16., et le théorème 6.23. lequel affirme que les cribles de $\boldsymbol{F}$-i-descente universelle définissent une topologie sur $\boldsymbol{E}$. Nous allons les améliorer en supposant dans $\boldsymbol{E}$ l'existence de certains produits fibrés et en utilisant les techniques " simpliciales " de 7 et de 8. Nous énoncerons quelques corollaires en termes d'objets munis d'une donnée de descente. Dans ce langage, les énoncés sont plus précis mais longs. Nous laisserons à l'utilisateur le soin d'établir, si besoin est, une traduction complète de nos tableaux de résultats.

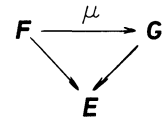
Avec les modifications évidentes, nos énoncés sont valables pour des familles de morphismes. La généralisation se fait grâce à 9.18..

Signalons que les sommes directes qui sont des familles de descente ont été étudiées dans 9 - c) et que l'on a prouvé le " lemme des diagonales " : 9.17..

10 - a) Propriétés liées au théorème de comparaison.

Comme annoncé, améliorons 6.16..

Théorème 10.1. Soit $\boldsymbol{E}$ une catégorie et soit



un $\boldsymbol{E}$-foncteur cartésien entre $\boldsymbol{E}$-catégories fibrées.. Soit $r : R \to S$ une flèche de $\boldsymbol{E}$. Supposons que le carré et le cube de (R/S) existent dans $\boldsymbol{E}$ et notons-les respectivement R' et R" . Pour tout $X \in Ob(\boldsymbol{E})$, on note $\mu_X : \boldsymbol{F}_X \to \boldsymbol{G}_X$ le foncteur induit par μ sur les fibres en X.

Chaque ligne du tableau ci dessous est un théorème quand on la lit comme suit. Un chiffre i inscrit dans la même colonne qu'un foncteur (i.e. , μ_S , μ_R, $\mu_{R'}$ ou $\mu_{R''}$) signifie que ce dernier est i-fidèle, c'est à dire fidèle, pleinement fidèle ou une équivalence, selon que i = 0, 1 ou 2. Un chiffre i inscrit dans la même colonne que $\boldsymbol{F}$ (resp. $\boldsymbol{G}$) signifie que r est un morphisme de $\boldsymbol{F}$-i-descente (resp. $\boldsymbol{G}$-i-descente).

Hypothèses						Conclusions		
μ_S	μ_R	$\mu_{R'}$	$\mu_{R''}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{G}$	μ_S	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{G}$
	0			0		0		
	1	0		1	0	1		

Hypothèses (suite)						Conclusions	
	2	1	0	2	1	2	2
0					0	0	
1	0				1	1	
2	1	0			2	2	
2	1	0		1			1
2	2	1	0	2			2

A titre d'exercice de lecture, voici la signification de la troisième ligne. "Si le foncteur μ_R est une équivalence, si $\mu_{R'}$ est pleinement fidèle, si $\mu_{R''}$ est fidèle, si r est un morphisme de ***F***-descente effective et si r est un morphisme de ***G***-descente, **alors** le foncteur μ_S est une équivalence. **De plus,** r est un morphisme de ***G***-descente **effective.**

Voici comment on établi ce tableau. On utilise le carré commutatif (6.14), où ***C*** est le crible de $E_{/S}$ engendré par r. Pour que μ_S soit i-fidèle, il faut et il suffit que le foncteur s de (6.14) le soit. Pour que r soit un morphisme de ***F***-i-descente (resp. ***G***-i-descente) il faut et il suffit que le foncteur f (resp. g) de (6.14) soit i-fidèle. Grâce à 7.17., appliqué au foncteur β: $(S.S.Simpl)_2^o \to \mathbf{C}$ défini par R' et R", cf. 7.8., on traduit les hypothèses portant sur μ_R, $\mu_{R'}$ et $\mu_{R''}$ en hypothèses de i-fidélité portant sur le foncteur $\mathbb{H}(\mathbf{C},\mathbf{F})$ de (6.14). Pour obtenir le tableau ci dessus, il suffit alors d'utiliser le pense-bête : 6.13..

D'après 9.16., en passant aux catégories de familles d'objets, on obtient un tableau analogue, portant cette fois sur une famille $\mathbb{R} = (r_i : R_i \to S)_{i\in I}$ de flèches de ***E*** ayant même but. Il suffit de remplacer les assertions portant sur μ_R (resp. $\mu_{R'}$) (resp. $\mu_{R''}$) par des assertions analogues portant sur tous les foncteurs induits par μ sur les catégories fibres en les R_i, $i\in I$, (resp. $R_i \times_S R_j$, $(i,j)\in I\times I$) (resp. $R_i \times_S R_j \times_S R_k$, $(i,j,k)\in I\times I\times I$), cf. (7.53).

Grâce à la commutativité du diagramme (9.42) on peut, en munissant ***F*** d'un clivage c et ***G*** d'un clivage d, interpréter les propriétés de fidélité du foncteur $\mathbb{H}(\mathbf{C},\mu)$ de (6.14) par des propriétés de fidélité du foncteur $\mathbf{Desc}(\mu)$ induit par μ entre les catégories d'objets munis d'une donnée de descente, (9.41). On obtient alors un diagramme commutatif

(10.1)

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{F}_S & \xrightarrow{\mu_S} & \mathbf{G}_S \\ \Delta \downarrow & & \downarrow \Delta' \\ \mathbf{Desc}(\mathbf{F}/\mathbf{E}, c, r) & \xrightarrow{\mathbf{Desc}(\mu)} & \mathbf{Desc}(\mathbf{G}/\mathbf{E}, d, r) \end{array}$$

où Δ et Δ' sont les foncteurs de (9.38).

L'énoncé suivant, joint au carré (10.1), permet de préciser 10.1..

Corollaire 10.2. Sous les hypothèses de 10.1., soient encore c (resp. d) un clivage de F (resp. G).

(i) Si le foncteur $\mu_{R'}$ est pleinement fidèle, pour tout $x \in Ob(F_R)$, le foncteur $Rec(\mu)$ induit une bijection entre les données de recollement sur x et sur $\mu(x)$.

(ii) Si, de plus, le foncteur $\mu_{R''}$ est fidèle, pour tout $x \in Ob(F_R)$, le foncteur $Desc(\mu)$ induit une bijection entre les données de descente sur x et sur $\mu(x)$.

(iii) Si, de plus, le foncteur μ_R est pleinement fidèle, le foncteur $Desc(\mu)$ est pleinement fidèle. Pour qu'un objet (y, v) de $Desc(G/E, d, r)$ appartienne à l'image essentielle de $Desc(\mu)$, il faut et il suffit que y appartienne à l'image essentielle de μ_R.

Lorsque μ est un morphisme de catégories scindées, nous avons prouvé cet énoncé pour démontrer 7.17.. Le cas général peut être démontré de manière analogue en tenant compte des isomorphismes de transitivité de l'image inverse. Il est plus commode de remplacer μ par $\Phi\mathfrak{S}\mu : \Phi\mathfrak{S}F \to \Phi\mathfrak{S}G$, qui est un morphisme de catégories scindées, cf. 5-b), et d'utiliser le fait, déjà reconnu dans la preuve de 9.12., que les foncteurs $Rec(vF)$ et $Desc(vF)$ sont pleinement fidèles et **surjectifs** sur les objets, cf. (9.56) et supra..

A l'aide du corollaire précédent, améliorons la troisième ligne du tableau.

Corollaire 10.3. Sous les hypothèses de 10.1., soit c un clivage de F (resp. d un clivage de G). Supposons que μ_R et $\mu_{R'}$ soient pleinement fidèles, que $\mu_{R''}$ soit fidèle, que r soit un morphisme de F-descente effective et de G-descente.

Pour qu'un objet y de G_S appartienne à l'image essentielle de μ_S il faut et il suffit que $r^d(y)$ appartienne à l'image essentielle de μ_R.

Preuve . Par hypothèse, dans (10.1), Δ est une équivalence, et Δ' est pleinement fidèle. D'après la première assertion de 10.2.(iii), $Desc(\mu)$ est pleinement fidèle. D'après 10.2.(iii), pour que la donnée de descente naturelle de $r^d(y)$ appartienne à l'image essentielle de $Desc(\mu)$, il faut et il suffit que $r^d(y)$ appartienne à l'image essentielle de μ_R, d'où la conclusion..

Considérons maintenant un carré **commutatif** de $\boldsymbol{E}$

(10.2)

$$\begin{array}{ccc} S & \xleftarrow{\ r\ } & R \\ {\scriptstyle f}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle g} \\ T & \xleftarrow[\ u\ ]{} & U \end{array}$$

dont, pour une fois, on **ne suppose pas** qu'il soit un produit fibré. Soient (R', p_0, p_1) et (R'', q_0, q_1, q_2) un carré et un cube de (R/S) dans $\boldsymbol{E}$ et soient (U', p'_0, p'_1) et (U'', q'_0, q'_1, q'_2) un carré et un cube de (U/T). On définit un morphisme $g' : U' \to R'$ par la propriété universelle du produit fibré

$$p_i g' = g p''_i \quad , \ i = 0 \text{ et } i = 1, \tag{10.3}$$

et un morphisme $g'' : U'' \to R''$ par $q_k g'' = g q_k$, $0 \leqslant k \leqslant 2$.

Théorème 10.4. Soit $\varphi : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$ un foncteur fibrant. Soit un carré commutatif de $\boldsymbol{E}$ tel que (10.1). Supposons que le carré et le cube de (R/S) (resp. (U/T)) existent dans $\boldsymbol{E}$. Avec les notations introduites depuis (10.2), on a le tableau de résultats :

Hypothèses						Conclusions		
f	g	g'	g"	r	u	f	r	u
	0			0		0		
	1	0		1	0	1		
	2	1	0	2	1	2		2
0					0		0	
1	0				1		1	
2	1	0			2		2	
2	1	0		1				1
2	2	1	0	2				2

dont chaque ligne est un théorème quand on la lit comme suit. Un chiffre i inscrit dans la même colonne que f,g,g' où g" signifie que le foncteur image inverse relatif à ce morphisme est i-fidèle. Un chiffre i inscrit dans la même colonne que r (resp. u) signifie que r (resp. u) est un morphisme de $\boldsymbol{F}$-i-descente.

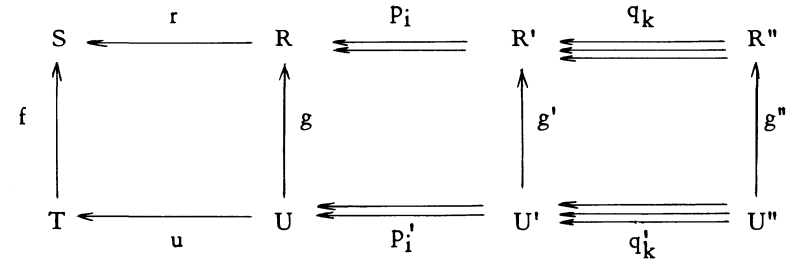
Démonstration. Considérons le foncteur $\hat{f} : \hat{S} \to \boldsymbol{E}$ (resp. $\hat{u}$) associé par (9.1) à r, R' et R" (resp. à u, U' et U"), où l'on a posé $\hat{S} = (\hat{\mathrm{Simpl}})^{o}_{2}$.

Désignons par $\boldsymbol{F}_r$ (resp. $\boldsymbol{F}_u$) la catégorie déduite de $\boldsymbol{F}$ par le changement de base $\hat{f}$ (resp. $\hat{u}$). On définit un morphisme de foncteurs $\hat{f} : \hat{u} \to \hat{r}$ en posant $\hat{f}(\emptyset) = f$, et $\hat{f}([0,n]) = g, g'$ ou g'' selon que $n = 0$, 1 ou 2. Cela est clair d'après la définition de g' et g'' et la commutativité de (10.2). **Soit c un clivage de** φ (il en existe car φ est fibrant). D'après 1.17.(i), il existe un $\hat{S}$-foncteur cartésien $\mu : \boldsymbol{F}_r \to \boldsymbol{F}_u$, qui induit sur les fibres en $\emptyset$ un foncteur isomorphe au foncteur image inverse f^c et sur les fibres en $[0,n]$ un foncteur isomorphe au foncteur image inverse g^c, g'^c ou g'', selon que $n = 0$, 1 ou 2. Or, d'après 9.1., pour que r (resp. u) soit un morphisme de $\boldsymbol{F}$-i-descente, il faut et il suffit que le morphisme $\phi_0 : [0,0] \to \emptyset$ soit de $\boldsymbol{F}_r$-i-descente (resp. de $\boldsymbol{F}_u$-i-descente). D'où la la conclusion, d'après 10.1..

C.Q.F.D.

Pour la suite, il est bon de symboliser le morphisme de foncteurs $\hat{f} : \hat{u} \to \hat{r}$ par le diagramme ci dessous.

(10.4)



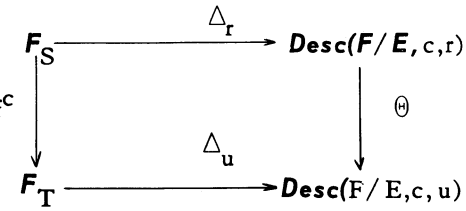
Corollaire 10.5. Sous les hypothèses de 10.4., soit encore c un clivage de φ.

(i) Il existe un foncteur

(10.5) $$\Omega : \boldsymbol{Rec(F/E}, c, r) \to \boldsymbol{Rec(F/E}, c, u).$$

(ii) Il induit un carré commutatif à isomorphisme près

(10.6)



La projection de $\boldsymbol{F}_r$ sur $\boldsymbol{F}$ induit un isomorphisme entre $\boldsymbol{Rec}(\boldsymbol{F}_r/\hat{S}, c', \phi_0)$ et $\boldsymbol{Rec}(\boldsymbol{F}/\boldsymbol{E}, c, r)$, où c' est le clivage déduit de c par le changement de base $\hat{r}$. Le foncteur Ω de (10.5) est le transporté de $\boldsymbol{Rec}(\mu)$ par cet isomorphisme et par l'analogue relatif à $\hat{u}$, cf. 9.15.. D'après 9.12. (ii), le foncteur Ω se factorise par " les catégories **Desc** ", ce qui définit le foncteur Θ de (10.6), les foncteurs Δ_r et Δ_u étant définis par (9.38) La commutativité de (10.1), entraîne celle de (10.6).

Soit (x, α) un objet de $\boldsymbol{Rec}(\boldsymbol{F}/\boldsymbol{E}, c, r)$ et soit $(y, \beta) = \Omega(x, \alpha)$. Il est aisé de vérifier que $y = g^c(x)$ et que l'on a

$$\beta = \xi_0 \cdot g'^c(\alpha) \cdot (\xi_1)^{-1} \quad , \tag{10.7}$$

où l'on a posé

$$\xi_i = (c_{g, p'_i}(x))^{-1} \cdot c_{p_i, g'}(x), \quad 0 \leqslant i \leqslant 1 ,$$

cf. (10.3) et (1.9).

De 10.2., on déduit le corollaire suivant.

Corollaire 10.6. Sous les hypothèses de 10.5.,

(i) si le foncteur g'^c est pleinement fidèle, pour tout $x \in Ob(\boldsymbol{E}_R)$, le foncteur Ω induit une bijection entre les données de recollement sur x (relatives à r) et sur $g^c(x)$ (relatives à u),

(ii) si, de plus, g''^c est fidèle, pour qu'une donnée de recollement sur $x \in Ob(\boldsymbol{F}_R)$ soit une donnée de descente, il faut et il suffit que son image par Ω en soit une,

(iii) si f^c est une équivalence, si g^c est pleinement fidèle et si g'^c est fidèle, pour qu'une donnée de descente sur un objet x de $\boldsymbol{F}_R$ soit **effective,** il faut et il suffit que son image par Θ le soit.

On peut préciser la ligne 3 du tableau de la manière suivante.

Corollaire 10.7. Soit $\varphi : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$ un foncteur fibrant muni d'un clivage c. Supposons que les produits fibrés finis existent dans $\boldsymbol{E}$. Soit $f : S_o \to S$ une flèche de $\boldsymbol{E}$ et soit $\mathbb{M}$ une partie de $F1(\boldsymbol{E})$, stable par changement de base et par composition et possédant les propriétés suivantes :

(a) tout élément de $\mathbb{M}$ de but S, est un morphisme de $\boldsymbol{F}$-descente effective,

(b) pour tout élément $r : S' \to S$ de $\mathbb{M}$, la seconde projection $r_o : S'_o \to S_o$ $(S'_o = S' \times_S S_o)$ est un morphisme de $\boldsymbol{F}$-descente et le

le foncteur image inverse associé à la première projection $f' : S'_o \to S'$ est pleinement fidèle.

(c) pour tout $x \in Ob(\boldsymbol{F}_{S_o})$ il existe $r \in \mathbb{M}$, $r : S' \to S$, tel que l'image inverse de x par r_o appartienne à l'image essentielle du foncteur image inverse f'^c.

Alors, le foncteur image inverse f^c est une équivalence.

Prouvons que f^c est pleinement fidèle. Si $\boldsymbol{F}_{S_o}$ est la catégorie vide, cela est clair. Sinon, on choisit $r \in \mathbb{M}$ comme il est dit dans (c) et on conclut grâce à la seconde ligne du tableau de 10.4..

Prouvons que f^c est une équivalence.. Soit $x \in Ob(\boldsymbol{F}_{S_o})$, pour prouver que x appartient à l'image essentielle de f^c, on applique 10.3. au $\hat{\boldsymbol{S}}$-foncteur cartésien associé par la preuve de 10.4. au carré commutatif fourni par le produit fibré $S' \times_S S_o$.

[Exercice : Trouver un énoncé analogue où l'on conclut que f^c est pleinement fidèle] .

10 - b). Propriétés liées au théorème d'échange.

Comme on l'a dit, on va améliorer 6.25., qui était déjà précisé par 6.27.. Pour cela,,nous allons traduire 8.8..

Considérons un produit fibré de $\boldsymbol{E}$

(10.8)

$$\begin{array}{ccc} R & \xleftarrow{f_0} & R' \\ {\scriptstyle r}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r'} \\ S & \xleftarrow[f]{} & S' \end{array}$$

Supposons que, pour $0 \leqslant p, q \leqslant 3$, le produit fibré $(R/S)^p \times_S (S'/S)^q$ existe dans $\boldsymbol{E}$. On construit alors un foncteur

(10.9). $\quad \hat{a} : (\hat{\text{Simpl}})_2^o \times (\hat{\text{Simpl}})_2^o \to \boldsymbol{E}$,

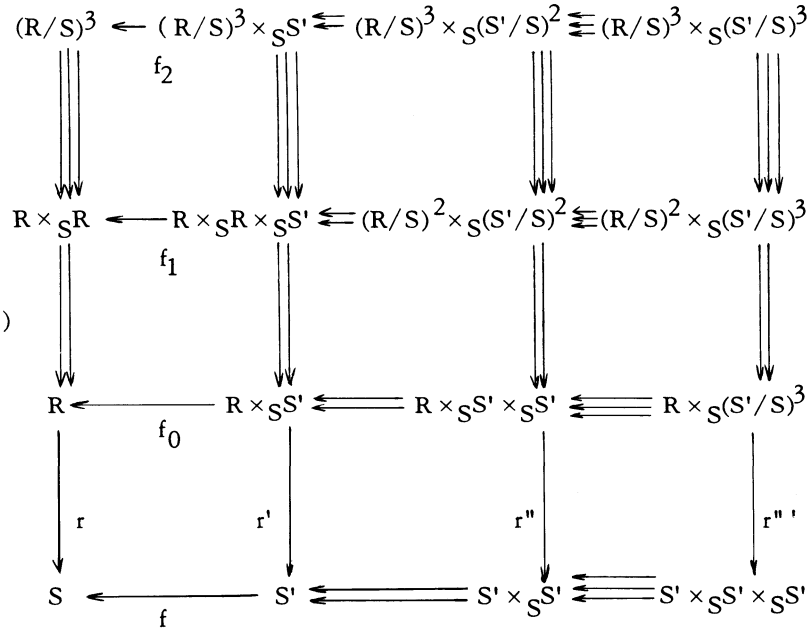
caractérisé à isomorphisme unique près par le fait qu'il commute aux produits fibrés et vérifie

(10.10) $\quad \hat{a}(\phi_0, \phi) = f \quad$ et $\quad \hat{a}(\phi, \phi_0) = r,$

où l'on rappelle que $\phi_0 : [0,0] \to \emptyset$ est, dans $(\hat{\mathrm{Simpl}})_2^\circ$, le morphisme final de source $[0,0]$, cf. (8.7), et où ϕ désigne le morphisme identique de $\emptyset$.

On peut symboliser ce foncteur par un diagramme, où toutes les flèches représentées sont les projections structurales,

(10.11)



Posons $\hat{S} = (\hat{\mathrm{Simpl}})_2^\circ$ et $S = (\mathrm{Simpl})_2^\circ$, nous allons appliquer 8.8. à la catégorie fibrée $\hat{F}$ sur $\hat{S}$ déduite de F par le changement de base $\hat{a} : \hat{S} \times \hat{S} \to E$ de (10.9). Avec les notations de 8.8., d'après 9.1., on sait que pour que le foncteur l_i, $-1 \leqslant i \leqslant 2$, soit $\hat{F}$-p-fidèle il faut et il suffit que le morphisme f (ou f_0 ou f_1 ou f_2, selon que $i = -1$ ou 0 ou 1 ou 2) soit de F-p-descente, $0 \leqslant p \in 2$. De même, pour que c_{-1} soit $\hat{F}$-p-fidèle il faut et il suffit que r soit un morphisme de F-p-descente, etc... On en déduit le théorème ci-dessous, qui améliore 6.25.(i).

Théorème 10.8. Soit $\varphi : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$ un foncteur fibrant. Soit un produit fibré de $\boldsymbol{E}$ tel que (10.8). Supposons que les produits fibrés $(R/S)^p \times_S (R'/S)^q$, $0 \leqslant p, q \leqslant 3$, existent dans $\boldsymbol{E}$ et notons comme il est dit dans (10.11) certaines des applications déduites de f et de r par la propriété universelle du produit fibré. On a les propriétés suivantes

(i) si r et f_0 sont des morphismes de $\boldsymbol{F}$-descente et si f_1 est un morphisme de $\boldsymbol{F}$-0-descente (i.e. si le foncteur image inverse associé est fidèle) **alors** le composé $rf_0 = fr'$ est un morphisme de $\boldsymbol{F}$-descente. Si, **de plus,** r' est un morphisme de $\boldsymbol{F}$-0-descente, **alors** f est un morphisme de $\boldsymbol{F}$-descente.

(ii) si r et f_0 sont des morphismes de $\boldsymbol{F}$-descente effective, si f_1 est un morphisme de $\boldsymbol{F}$-descente et si f_2 est un morphisme de $\boldsymbol{F}$-0-descente, **alors** le composé $rf_0 = fr'$ est un morphisme de $\boldsymbol{F}$-descente effective. Si, **de plus,** r' est un morphisme de $\boldsymbol{F}$-descente et si r" est un morphisme de $\boldsymbol{F}$-0-descente, **alors** f est un morphisme de $\boldsymbol{F}$-descente effective.

L'énoncé intermédiaire où l'on ne suppose rien sur r' et r" est justifié par 8.9. car la restriction du foncteur a de (10.9) à la catégorie diagonale de $\hat{\boldsymbol{S}} \times \hat{\boldsymbol{S}}$ est le foncteur associé par (9.1) au morphisme $rf_0 = fr'$.

C.Q.F.D.

Corollaire 10.9. Sous les hypothèses de 10.8., soit encore c un clivage de φ. Soit (x,u) un objet de $\boldsymbol{Desc(F/E}$,c,f). Désignons par $(r'^c(x), v)$ l'image de (x,u) par le foncteur Θ de (10.6), où (r, r', r", r"') remplace (f, g, g', g").

(i) Si u est effective, il en est de même de v.

(ii) Supposons que f_0 et f_1 soient des morphismes de $\boldsymbol{F}$-descente et que f_2 soit un morphisme de $\boldsymbol{F}$-0-descente. **Si** v **est effective,** soit $y \in Ob(\boldsymbol{F}_R)$ et soit $m : f_0^c(y) \to r'^c(x)$ un R'-isomorphisme compatible avec v et avec la donnée de descente naturelle de $f_0^c(y)$. **Il existe** une donnée de descente w sur y relative à r, **caractérisée** par la condition que m soit compatible avec la donnée de descente relative à r' définie sur $f_0^c(y)$ par le foncteur Θ de (10.6), où (f, f_0, f_1, f_2) remplace (f, g, g',g"), et avec la donnée de descente naturelle de $r'^c(x)$.

(iii) Sous les hypothèses de (ii), supposons de plus que r' soit un morphisme de $\boldsymbol{F}$-descente et que r" soit un morphisme de $\boldsymbol{F}$-0-descente, Pour que u soit effective, il faut et il suffit que w le soit. De plus,

si $z \in Ob(\boldsymbol{F}_S)$ vérifie $\Delta_r(z) \approx (y,w)$, on a $\Delta_f(z) \approx (x,u)$. (Où Δ_r et Δ_f sont les foncteurs de (9.38), relatifs à r et f).

Démonstration. (i) résulte de la commutativité de (10.6). Pour prouver (ii), notons déjà que 9.1. et 9.15. nous permettent de supposer que $\hat{a}$ est le foncteur identique de $\hat{\boldsymbol{S}} \times \hat{\boldsymbol{S}}$. Nous utiliserons cependant les notations de (10.11), plus commodes que celles suggérées par (2.16). On remarque alors que le foncteur source relatif à f identifie $\boldsymbol{E}_{/S}$ à $\boldsymbol{E}$ et que le crible de $\boldsymbol{E}$ engendré par f n'est autre que $\boldsymbol{S} \times \hat{\boldsymbol{S}}$. Il existe donc une "section cartésienne" $X \in Ob(\mathbb{H}(\boldsymbol{S} \times \hat{\boldsymbol{S}}, \boldsymbol{F}))$ dont l'image par le foncteur ρ de (9.39) soit égale à (x,u). Soit $\boldsymbol{L}_0$ la ligne de R' dans le produit $\boldsymbol{S} \times \hat{\boldsymbol{S}}$ et soit X_0 la restriction de X à $\boldsymbol{L}_0$. Il est clair que X(R') est une image inverse de x par r' et, par ailleurs, X_0 définit sur X(R') une donnée de descente relative à f_0. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que celle-ci est obtenue à partir de la donnée de descente v de l'énoncé par transfert suivant le R'-isomorphisme canonique α: $X(R') \to r'^c(x)$. **Tout ceci n'utilise pas les hypothèses de** (ii). Grâce à celles-ci, nous allons montrer que la restriction X' de X à $\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{S}$ se prolonge à $\hat{\boldsymbol{S}} \times \boldsymbol{S}$. Pour cela, nous allons appliquer 8.5.(iv), (ou plutôt l'énoncé symétrique), au foncteur d'inclusion $\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{S} \to \hat{\boldsymbol{S}} \times \boldsymbol{S}$. Puisque v est effective, il existe un prolongement Y_0 de X_0 à la ligne $\hat{\boldsymbol{L}}_0$ de R dans $\hat{\boldsymbol{S}} \times \boldsymbol{S}$. Il existe donc un objet Y de $\mathbb{H}(\hat{\boldsymbol{S}} \times \boldsymbol{S}, \boldsymbol{F})$ dont la restriction à $\hat{\boldsymbol{L}}_0$ (resp. à $\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{S}$) est égal à Y_0 (resp. à X'). Il est clair que l'on peut choisir Y_0 de telle sorte que $Y_0(R) = y$, donc $Y(R) = y$.

Désignons maintenant par w_o la donnée de descente relative à r définie sur y par Y. (Noter que $\hat{\boldsymbol{S}} \times \hat{\boldsymbol{S}}$ est le crible de $\hat{\boldsymbol{S}} \times \hat{\boldsymbol{S}}$ engendré par r). Soit encore w' la donnée de descente sur $f_0^c(y)$, image de w_o par le foncteur Θ de (10.6), où (f, f_0, f_1, f_2) remplace (f, g, g', g''). Comme plus haut, nous savons que w' est obtenue par transfert suivant l'isomorphisme canonique β: $f_0^c(y) \to Y(R')$ à partir de la donnée de descente relative à r' définie sur Y(R') par la restriction de Y à la colonne de R'. Or cette restriction est aussi celle de X. On en déduit que w' est obtenu par transfert suivant $\alpha\beta$ à partir de la donnée de descente naturelle de $r'^c(x)$. Cette propriété caractérise w', mais aussi w_o. En effet, le foncteur f_1^c est fidèle puisque f_1 est un morphisme de $\boldsymbol{F}$-descente et on a $w' = \xi_0 \cdot f_1^c(w_o) \cdot (\xi_1)^{-1}$, où les ξ_i sont des isomorphismes qui dépendent de y mais pas de w_o, cf. (10.7). L'isomorphisme $\alpha\beta$ est compatible avec la donnée de descente naturelle de $f_0^c(y)$ et avec v, mais n'est pas nécessairement égal à l'isomorphisme m de l'énoncé. Cependant, puisque f_0

est un morphisme de $\boldsymbol{F}$-descente, il existe un R-automorphisme de y, noté a, tel que $\alpha\beta = m.f_0^c(a)$. On en déduit que l'on peut supposer que $m = \alpha\beta$,- ce qui prouve (ii).

Prour prouver (iii), on note que l'effectivité de w (resp. de u) équivaut à l'existence d'un prolongement de Y (resp. de X) à $\hat{S}\times\hat{S}$ et que la valeur en S d'un tel prolongement, notée z, vérifie $\triangle_r(z) \approx (y,w)$ (resp. $\triangle_f(z) \approx (x,u)$). Les hypothèses de (ii) (resp. (iii)) assurent que le foncteur restriction de $\hat{S}\times\hat{S}$ à $\hat{S}\times S$ (resp. à $S\times\hat{S}$) est pleinement fidèle, ce qui prouve que si Z prolonge Y (resp. X) sa restriction à $S\times\hat{S}$ (resp. $\hat{S}\times S$) est isomorphe à X (resp. Y).

C.Q.F.D.

Voici un énoncé qui précise 6.25. (ii) et 6.27. (iii).

Proposition 10.10. Soit $\varphi : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$ un foncteur fibrant. Soient f et g deux morphismes composables de $\boldsymbol{E}$, de composé fg = r. Supposons f et r quarrables.

(i) Si r est un morphisme de $\boldsymbol{F}$-0-descente il en est de même de f,

(ii) Si r est un morphisme de $\boldsymbol{F}$-descente il en est de même de f, à condition que le morphisme r' déduit de r par le changement de base f soit de $\boldsymbol{F}$-0-descente (ce qui est vrai si g est un morphisme de $\boldsymbol{F}$-0-descente ou bien si r est un morphisme de $\boldsymbol{F}$-0-descente universelle).

(iii) Si r est un morphisme de $\boldsymbol{F}$-descente effective, il en est de même de f, à condition que r soit, de plus, un morphisme de $\boldsymbol{F}$-descente universelle.

Preuve. (i) est une trivialité sur les foncteurs image inverse. Pour prouver (ii) et (iii), on introduit le produit fibré

(10.12)
$$\begin{array}{ccc} R & \xleftarrow{f_0} & R\times_S S' \\ {\scriptstyle r}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r'} \\ S & \xleftarrow[f]{} & S' \end{array}$$

et on construit le diagramme analogue à (10.11), avec les mêmes notations. C'est pour cela que l'on a supposé f et g quarrables, ce qui est évidemment un peu trop. Il est clair que g définit une section de f_0, c'est à dire un

morphisme $s : R \to R \times_S R'$ tel que $f_0 s = id_R$ et $r's = g$. Par suite le crible de $\boldsymbol{E}_{/R}$ engendré par f_0 est égal à $\boldsymbol{E}_{/R}$ et f_0 est un morphisme de $\boldsymbol{F}$-descente universelle. On prouve (ii) (resp. (iii)) en appliquant 10.8. (i) (resp. 10.8. (ii)).

Voici un énoncé qui précise 6.25. (iii) et 6.27. (i).

Proposition 10.11. Soit $\varphi : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$ un foncteur fibrant. Soient f et g deux morphismes composables de $\boldsymbol{E}$, de composé r = fg. Supposons l'existence, dans $\boldsymbol{E}$, des produits fibrés finis dont l'un des facteurs est r, f ou g.

(i) Si f et g sont des morphismes de $\boldsymbol{F}$-0-descente, il en est de même de r.

(ii) Si f et g sont des morphismes de $\boldsymbol{F}$-descente et si g est un morphisme de $\boldsymbol{F}$-0-descente **universelle**, r est un morphisme de $\boldsymbol{F}$-descente.

(iii) Si f et g sont des morphismes de $\boldsymbol{F}$-descente effective et si g est un morphisme de $\boldsymbol{F}$-descente universelle, r est un morphisme de $\boldsymbol{F}$-descente effective.

Démonstration. (i) est trivial. Pour prouver (ii) et (iii), on construit le produit fibré (10.12) et le diagramme (10.11). On applique également 10.8., mais en échangeant les rôles de r et de f. On sait que f_0, f_1 et f_2 ont des sections et sont des morphismes de $\boldsymbol{F}$-descente effective universelle. Pour prouver (ii), il nous reste à montrer que r' est un morphisme de $\boldsymbol{F}$-descente et que r" est un morphisme de $\boldsymbol{F}$-0-descente. Or g domine r' et g est un morphisme de $\boldsymbol{F}$-descente et de $\boldsymbol{F}$-0-descente universelle. D'après 10.10. (ii), r' est donc un morphisme de $\boldsymbol{F}$-descente. D'après 6.25. (ii), c'est un morphisme de $\boldsymbol{F}$-0-descente universelle, donc aussi r". Pour prouver (iii), il nous reste à montrer que r' est un morphisme de $\boldsymbol{F}$-descente effective, que r" est un morphisme de $\boldsymbol{F}$-descente et que r"' est un morphisme de $\boldsymbol{F}$-0-descente. Or g est un morphisme de $\boldsymbol{F}$-descente effective et de $\boldsymbol{F}$-descente universelle. Puisque g domine r', ce dernier est un morphisme de $\boldsymbol{F}$-descente effective d'après 10.10. (iii) et de $\boldsymbol{F}$-descente universelle d'après 6.25. (ii).

C.Q.F.D.