STRUCTURES STRATIFIÉES
Par A GROTHENDIECK[1]

---

1. La situation la plus élémentaire,

En un ses qui apparaître, sera la suivante.

[]

de groupoïdes fondamentaux [] est cocartésien - ou encore, si Y, X, X^* sont connexes, et [] (i.e. par définition, un revêtement universel de []) [] un isomorphisme canonique de groupes fondamentaux [] où [] est isomorphe extérieurement à $\pi_1(Y)$.

Pour expliciter $\pi_1(X)$ en termes de données "élémentaires", dont $\pi_1(Y)$ et $\pi_1(X^*)$ [] encore à expliciter la structure de [], qui s'envoie dans l'un et dans l'autre, donnant [] [] qui exprime (8). C'est ici que l'hypothèse de *locale []* a un [] (celle de lissité [] comme devant techniquement initiale, [] de notre heuristique...).

On doit se [], dans ce cas, pour démontrer que les [] homotopique de [] sont celles d'une *fibration localement triviale des fibres* []: [] - et c'est []] qui devrait [] le contexte topossique (p. ex. celui des schémas avec le topos étale) de *définition* de la "locale trivialité" [] homotopique [] $Y \hookrightarrow X$. (Bien sûr, dans le contexte schématique, il faudrai de plus travailler avec des types d'homotopie profini, et même sans doute "localiser" ces types d'homotopie en l'un des [] premières qui

[1]Ce texte a été déchiffré et transcrit par Mateo Carmona
https://agrothendieck.github.io/

sont distinctes des caractéristique résiduelle qui interviennent, ou que en n'est que alors ce contexte [ ] des théorèmes qu'il faut, cf Artin-Mazur...)

On ont en particulière une suite exacte d'homotopie [ ]

Si on suppose par exemple que [ ]

allusion, en devrait [ ] exprimer alors le *type d'homotopie de X* (et non seulement son π_1) en termes de diagrammes de groupoïdes (8), ou ce qui revient au même, des diagrammes de groupes (10).

En tous cas, il est clair (indépendemment de toutes hypothèses de nullité de [ ] π_i, ou de [ ]) comment reconstruire en termes du diagramme (8), [ ] faisceaux sur X, [ ] tels que l'on ait

$$F|X^* \quad \text{et} \quad F|Y \quad \text{localisation triviaux} \tag{16}$$

Cette catégorie F est équivalent en effet à celle des systèmes

$$(E_{X^*}, E_{Y,X}, \varphi) \tag{17}$$

E_{X^*} est un système locale sur π, X^* (un recouvrement étale de X^*), $E_{Y,X}$ un système locale sur [ ] un homomorphisme de systèmes locaux sur [ ]

$$\varphi : p^*(E_{Y,X}) \longrightarrow i^*(E_{X^*}). \tag{18}$$

En termes de diagrammes de groupes (10)

2. Stratification globale : [ ] (sans tubes)

Pour simplifier, je vais en placer sur un espace topologique X - par le suite X [ ] un topos quelconque. Les constructions qui suivent, relatifs à une "stratification globale", [ ] de la façon habituelle - ce qui [ ] alors à imposer des conditions supplémentaires de connexité et de locale connexité, qui pour [ ]. De même [ ].

Soit I un ensemble ordonné,

$$(X_i)_{i\in I} \quad X_i \subset X$$

une famille de sous-espaces de X. On suppose [ ] Posant [ ] on a un morphisme canonique

$$X_{\Delta_0} \longrightarrow X \tag{3}$$

et l'hypothèse a) signifie que ce morphisme est fini - i.e. propre sépare et à fibres finies. C'est aussi une *immersion locale*. On introduit une partie fermé [] On voit alors que les deux projections [] ont respectivement les propriétés suivantes : [] Par ailleurs

3. Stratification globale : introduction au tubes

On [] les notations précédentes.

Pour toute couple $(i \leq j) \in I \times I$, considérons

4. Topos canoniques associées à une stratification globale

On va montrer comment, à une situation stratifiée donnée, on peut en associer d'autres.

A) Image inverse générale.

Rappelons les axiomes utilisés jusqu'à puisant : []

Notons que pour tout X' au dessus de X, le famille des [] satisfait alors aux mêmes conditions.

D'ailleurs le système [] des X_{Δ_r} - comme image inverse le lui des X'_{Δ_r}, défini par les X'_i, [] des isomorphismes []

NB. Nous appliquons ces [] sauf en cas où X' est un ouvert de X. C'est pour [] prendre de telles images inverses [], qu'il [] été commode de supposer les X_i ou les X_i^* non-vides, ou encore par $I \mapsto X_i$ est un *plongement* d'une ordonnée $I \hookrightarrow \mathfrak{P}(X)$.

Lorsque $X' \longrightarrow X$ est une immersion locale propre (mais pas si c'est une immersion ouverte !) alors [] les images inverses de parties [] de X comment à [] des voisinages tubulaires de une telles parties []. Notons d'ailleurs que pour $i < j$, [] (sans hypothèse d'ailleurs que $X' \longrightarrow X$ sont une immersion locale) [] d'où, dans le cas d'une immersion locale propre, des isomorphismes [] et plus généralement [] tout qui à faire.

Ceci montre en particulière que la démonstration du théorème de recollement, [] théorème énoncé p.22, est une [] *locale* sur X^2 - ce qui prenant par exemple de nos [] au cas où I *est fini*.

[2] *non*, ce n'est pas absolument clair []

B) Cas d'un $X_{I'}$.

Soit I' une partie de I telle que

(7) $$i \leq j \in I' \Rightarrow i \in I'$$

et tout

(8) $$X_{I'} = \bigcup_{i \in I'} X_i \quad \text{(partie fermée de } X\text{)}$$

On a bien sûr [] (et aussi []) [] à (11 d). Dans ces formules, I', I'', les I'_α sont des parties de I satisfaisant (7) ([] *cribles* de I).

Si dans A) on prend $X' = X$, il est plus commode de travailler avec le stratification de X' définie par les X_i avec $i \in I'$ - il est clair que les conditions (II) relatives à $X' = X_{I'}$ sont satisfaites. Les "parties cribles" de X' pour cette stratification, ou pour celle induit au sens général des espaces au dessus de X, sont les mêmes - [] sur $X' = X_{I'}$ des parties-cribles de l'espace stratifié X.

Ici, les espaces élémentaires pour la stratification de type I' de $X' = X_{J'}$, sont les espaces []

[] pour une instant à X, et considérons l'un I_0 des $i \in I$ tel que $X_i = \varnothing$. C'est une crible, et on a $X_i^* = \varnothing$, [] si $i \in I_0$. [] on voit que les diagrammes de type $\widetilde{I}$ défini par l'espace stratifié X [] en remplaçant I par $I \backslash I_0$, ou plus guère par $I \backslash I'_0$, où $I'_0 \subset I'$ est une crible, ce qui donne lieu à un diagramme [] qu'est *contenu* dans $\widetilde{I}$ (cela est vrai pour *toute* crible de I).

Si par exemple on a deux cribles

(14) $$I'' \subset I' \subset I$$

d'où

(15)

[] regarder plutôt la stratification de type $I' \backslash I''$, définie par les

(16)

dont les topos élémentaires sont dans les $X^*_{i'}$ ($i' \in I' \backslash I''$) et des [] couples (i', j') avec $i' \in I' \backslash I''$ [] on a

(17)

mais il n'est pas clair en générale que ce soient mêmes semblant équivalences d'homotopie...

Donc il [] il s'agit de [] les constructions sur une $X_{I'}$, et sur un [].

Je vais en [] par C sauf de regarder plus particulièrement ce qui se [] en l'induisant ainsi sur un ouvert $U_{I',I''}$.

C) Les [].

On suppose donnée des cribles

(18)

d'où

(19)