A. Grothendieck, Sur une note de Mattuck, *Matematika*, 1960, Volume 4, Issue 2, 29–38

ОБ ОДНОЙ ЗАМЕТКЕ МАТТУКА — ТЭТА[1])

А. Гротендик

1. В недавней работе [4] Маттук и Тэт получают фундаментальное неравенство Вейля, доказывающее гипотезу Римана в функциональных полях [7], в качестве легкого следствия из теоремы Римана — Роха для поверхностей. Пытаясь выяснить истинное существо их метода, автор пришел к следующему предложению, которое (как указал автору Серр) в действительности известно с 1937 г. [2], [6], [1], но, по-видимому, его мало знают и редко им пользуются.

Теорема 1.1 (Ходж — Сегре — Броновский). *Пусть X — неособая проективная поверхность, $\mathfrak{P}$ — группа классов линейно эквивалентных дивизоров на X, P — многообразие Пикара поверхности X, $N = \mathfrak{P}/P$ — группа Нерона — Севери и $E = N \otimes R$ [2]). Рассмотрим на группе N билинейную симметрическую форму f, индуцированную отображением $(D, D') \to D \cdot D'$ группы $\mathfrak{P} \times \mathfrak{P}$ в группу Z [2]), и той же буквой f обозначим получающуюся из нее билинейную форму на пространстве $E \times E$. Оказывается, что форма f невырожденна и имеет тип* $(1, n-1)$, *где n — размерность пространства E.*

Формулировка этой теоремы по внешнему виду использует теорему Нерона [5] о конечномерности пространства E. Ясно, как следовало бы сформулировать теорему, чтобы избежать использования этого результата Нерона. Отметим тут же, что невырожденность формы f вытекает из одного результата Вейля [8], справедливого для любых многообразий X произвольной размерности. Что же касается второго утверждения теоремы 1 о том, что в форму f входит ровно один положительный квадрат, то оно достаточно просто и доказано в работах [1], [6] для любой характеристики. В п. 2 мы дадим еще более простое доказательство этого утверждения, использующее один вспомогательный результат (предложение 1), представляющий самостоятельный интерес. В этом же пункте мы покажем, как из теоремы 1 получаются некоторые замечательные неравенства, в том числе и неравенство Вейля.

Пусть f — произвольная билинейная симметрическая форма типа $(1, n-1)$ на некотором n-мерном векторном пространстве E. Пусть, далее, F — векторное подпространство пространства E, содержащее элемент x, для которого $f(x, x) \geqslant 0$. Тогда форма f на ортогональном дополнении F^0 пространства F является отрицательной и даже — в случае, когда форма f на пространстве F невырожденна, — отрицательно определенной формой. Пусть x, y, z — такие элементы пространства E, что $f(x, x) \geqslant 0$; тогда элемент $u = yf(x, z) - zf(x, y)$

---

[1]) Grothendieck A., Sur une note de Mattuck — Tate, *J. reine und angewandte Math.*, **200** (1958), 208—215.

[2]) R — поле рациональных чисел; Z — кольцо целых чисел.—*Прим. перев.*

ортогонален к элементу x, так что $f(u, u) \leqslant 0$, откуда следует, что

$$f(x, z)^2 f(y, y) + f(x, y)^2 f(z, z) = 2f(x, y) f(y, z) \cdot f(z, x) \leqslant 0 \quad (1.1)$$

(при условии, что $f(x, x) \geqslant 0$).

В этой формуле равенство может иметь место лишь в случае, когда $f(x, x) = 0$ или когда $yf(x, z) - zf(x, y) = 0$.

Пусть теперь x_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ — произвольные элементы пространства E, и пусть

$$g(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f\left(\sum \lambda_i x_i, \sum \lambda_i x_i\right).$$

Эта квадратичная форма либо вырожденна, либо имеет тип $(1, m-1)$, либо отрицательно определена, в зависимости от того, равен ли определитель $\det(f(x_i, x_j))$ нулю, имеет знак $(-1)^{m-1}$ или знак $(-1)^m$. Первые два случая могут иметь место тогда и только тогда, когда существует такая нетривиальная линейная комбинация элементов x_i, скажем x, что $f(x, x) \geqslant 0$. Таким образом, последнее условие равносильно неравенству

$$(-1)^{m-1} \det(f(x_i, x_j)) \leqslant 0. \quad (1.2)$$

Далее, без труда проверяется, что если векторное подпространство $F \subset E$ содержит элемент x, для которого $f(x, x) > 0$, то форма f на пространстве F невырожденна. Следовательно, выполнение строгого неравенства (1.2) равносильно тому, что размерность векторного пространства F, порожденного элементами x_i, равна m, и в этом пространстве существует вектор x, для которого $f(x, x) > 0$. Можно еще сказать, что если существует элемент x, для которого $f(x, x) > 0$, то имеет место соотношение (1.2), причем знак равенства в этом соотношении имеет место тогда и только тогда, когда векторы x_i линейно зависимы.

В частных случаях $m = 2$ и $m = 3$ получаются неравенства

$$f(x, x) f(y, y) \leqslant f(x, y)^2 \quad (1.3)$$

$$f(x, x) f(y, z)^2 + f(y, y) f(z, x)^2 + f(z, z) f(x, y)^2 - \\ - f(x, x) f(y, y) f(z, z) - 2f(x, y) f(y, z) f(z, x) \leqslant 0. \quad (1.4)$$

Они имеют место в том и только том случае, когда существует такая нетривиальная линейная комбинация u векторов x, y (соответственно векторов x, y, z), что $f(u, u) \geqslant 0$; знак равенства может иметь место лишь в случае, когда векторы x, y (соответственно векторы x, y, z) линейно зависимы *или* форма f отрицательна на порожденном этими векторами пространстве. В частности, из неравенства (1.3) следует неравенство (1.4), причем, если неравенство (1.3) не сводится к равенству, то знак равенства в неравенстве (1.4) возможен лишь тогда, когда вектор z является линейной комбинацией векторов x и y. Пусть, например,

$$f(x, x) = f(y, y) = 0, \qquad f(x, y) = 1. \quad (1.5)$$

Тогда для любого вектора z имеет место неравенство

$$f(z, z) - 2f(z, x) f(z, y) \leqslant 0, \quad (1.6)$$

которое переходит в равенство в том и только том случае, когда

$$z = xf(z, y) + yf(z, x). \quad (1.7)$$

Можно еще интерпретировать левую часть неравенства (1.6) как число $f(u, u)$, где u — ортогональная проекция вектора z на ортогональное дополнение к плоскости, порожденной векторами x, y. Кроме того, неравенство (1.6) также является частным случаем неравенства (1.1), но случай равенства здесь не исчерпывается случаями, указанными при рассмотрении (1.1).

В случае Вейля пространство E представляет собой пространство Нерона — Севери, соответствующее поверхности X являющейся произведением двух неособых проективных кривых Γ_1 и Γ_2. Выбрав по точке e_i на кривых Γ_i $(i=1, 2)$, рассмотрим в пространстве E классы x, y дивизоров $\Gamma_1 \times e_2$ и $e_1 \times \Gamma_2$. Так как для этих классов имеют место соотношения (1.5), то мы получаем, что для класса любого дивизора D на поверхности $X = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ имеет место неравенство Вейля

$$D^2 - 2\mu(D)\nu(D) \leqslant 0, \tag{1.8}$$

где $\mu(D)$ и $\nu(D)$ — „частичные степени“ дивизора D:

$$\mu(D) = D\cdot(\Gamma_1 \times e_2), \quad \nu(D) = D\cdot(e_1 \times \Gamma_2).$$

В силу сказанного выше, неравенство (1.8) превращается в равенство в том и только том случае, когда

$$D = \mu(D)(e_1 \times \Gamma_2) + \nu(D)(\Gamma_1 \times e_2) + D',$$

где D' — дивизор, образ которого в пространстве E равен нулю, т. е. образ которого в группе $N = \mathfrak{P}/P$ имеет конечный порядок. Отсюда (согласно Серру) следует, что на самом деле $D' \in P$. (Это дает полный результат Вейля.) Иными словами, имеет место следующий факт: ***группа Нерона — Севери N произведения $X = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ не имеет кручения***. Мы не будем здесь доказывать этот факт; укажем лишь, что он является частным случаем следующего результата, принадлежащего Серру и без труда вытекающего из результатов работы [3]: Пусть $T(X)$ — группа тех классов дивизоров на неособом проективном многообразии X, целочисленные кратные которых алгебраически эквивалентны нулю. Тогда справедлива следующая формула аддитивности:

$$T(X \times Y) = T(X) \times T(Y). \tag{1.9}$$

2. В этом пункте мы докажем теорему 1 вместе с упомянутым выше вспомогательным предложением, которое мы установим даже в несколько более сильной форме, чем это необходимо для нашей цели.

Пусть D — дивизор на поверхности X и пусть $l(D)$ — размерность векторного пространства функций f на поверхности X, для которых $(f) \geqslant -D$; ясно, что число $l(D)$ зависит лишь от класса дивизора D. Как известно, имеет место следующее ***неравенство Римана — Роха***:

$$l(D) + l(K-D) \geqslant \frac{1}{2} D\cdot(D-K) + \chi(X), \tag{2.1}$$

где K — ***канонический класс дивизоров*** на поверхности X, а $\chi(X)$ — ***арифметический род поверхности*** X. Это неравенство следует из равенства Римана — Роха ($\underline{O}(D)$ — это $\mathscr{L}(D)$ со стр. 3—24)

$$\sum_{i=0}^{2}(-1)^i \dim H^i(X, \underline{O}(D)) = \frac{1}{2} D(D-K) + \chi(X)$$

(которое теперь доказывается вполне элементарно) и теоремы двойственности Серра

$$\dim H^2(X, \underline{O}(D)) = \dim H^0(X, \underline{O}(K-D)). \tag{2.2}$$

Отметим еще следующее очевидное неравенство:

$$l(D+D') \geqslant l(D'), \text{ если } l(D) > 0. \tag{2.3}$$

Напомним, наконец, что

$$\text{из } l(D) > 1 \text{ следует, что } D \cdot H > 0, \tag{2.4}$$

(где H — произвольное гиперплоское сечение поверхности X в ее проективном вложении), ибо из $l(D) > 1$ следует, что дивизор D эквивалентен строго положительному дивизору D', а с другой стороны, можно найти гиперплоское сечение H', эквивалентное сечению H и не имеющее с дивизором D' общих компонент, откуда и вытекает, что $D \cdot H = D' \cdot H' > 0$.

Предложение 2.1. *Если D — такой дивизор, что $D^2 > 0$, то либо для дивизора D, либо для дивизора $-D$ имеет место равенство $l(-nD) = 0$ для всех целых $n > 0$. Кроме того, для любого дивизора D' и достаточно больших n имеет место равенство $l(D' - nD) = 0$ и соотношение $l(D' + nD) \to \infty$ при $n \to \infty$.*

Пусть

$$M = 1 + \sup(1, l(2K)). \tag{2.5}$$

Применяя неравенство (2.1) к дивизору mD, мы видим, что можно найти такое целое число $n \geqslant 0$, что $l(mD) + l(K - mD) \geqslant 2M$, когда $|m| \geqslant n$, откуда следует, что

$$l(mD) \geqslant M \quad \text{или} \quad l(K - mD) \geqslant M, \quad |m| \geqslant n. \tag{2.6}$$

Ограничимся рассмотрением тех m, для которых $|m| \geqslant n$. Тогда

$$\text{из } l(K - mD) \geqslant M \text{ следует } l(K + mD) = 0 \text{ и } l(-mD) \geqslant M. \tag{2.7}$$

В самом деле, если бы $l(K + mD) > 0$, то из неравенства (2.3) следовало бы, что $l(K + mD + K - mD) \geqslant M$, что противоречит формуле (2.5). Поэтому $l(K + mD) = 0$, так что $l(-mD) \geqslant M$, в силу неравенства (2.6), в котором m заменено на $-m$. Сравнивая утверждения (2.6) и (2.7), мы видим, что либо $l(mD) \geqslant M$, либо $l(-mD) \geqslant M$. Таким образом, меняя, если нужно, знак дивизора D, мы можем считать, что

$$l(mD) \geqslant M \tag{2.8}$$

и, следовательно,

$$l(-mD) = 0, \tag{2.8'}$$

ибо в противном случае из неравенства (2.3) вытекало бы, что $l(mD - mD) = 1 \geqslant M$, что противоречит формуле (2.5). Применяя теперь утверждение (2.6) к числу $-m$, мы получаем, что

$$l(K + mD) \geqslant M, \tag{2.8''}$$

откуда, аналогично применяя утверждение (2.7), получаем, что

$$l(K - mD) = 0. \tag{2.8'''}$$

Мы доказали, следовательно, что при $|m| \geqslant n$ имеют место либо четыре последние формулы, либо те формулы, которые получаются из них заменой D на $-D$. Ясно, что для $|m| \geqslant n$ любая из этих четырех формул влечет все остальные. Допустим, что при $m = n$ справедливы именно выписанные формулы. Оказывается тогда, что эти же формулы справедливы и для всех $m > n$. В самом деле, из неравенств (2.3) и (2.8) вытекает, что $l(knD) \geqslant M$ при $k > 0$, откуда, ввиду сказанного выше, следует, что $l(-knD) = 0$ и тем более (см. неравенство (2.3)), что

$$l(-kD) = 0 \text{ для } k > 0. \tag{2.9}$$

Полагая здесь $k=m$, мы получаем формулу (2.8′), а значит, и все формулы (2.8) — (2.8‴). Из последней формулы, в силу неравенства (2.1), следует, что

$$l(mD) \geqslant \frac{1}{2} mD(mD-K)+\chi(X) \quad \text{для} \quad |m| \geqslant n. \tag{2.10}$$

Пусть теперь D' — произвольный дивизор на поверхности X. Докажем, что

$$l(D'-mD)=0 \text{ для больших } m. \tag{2.11}$$

В самом деле, пусть $n' \geqslant n$ — такое число, что из неравенства $m \geqslant n'$ следует неравенство $l(mD) > l(D')$ (такое число n' существует в силу неравенства (2.10)). Если бы теперь имело место неравенство $l(D'-mD)>0$, то из неравенства (2.3) следовало бы невозможное неравенство $l(D'-mD+mD)>l(D')$. Тем самым равенство (2.11) доказано для любого дивизора D'. Применим, наконец, неравенство (2.1) к дивизору $D'+mD$, учитывая, что для больших m, в силу соотношения (2.11), примененного к дивизору $K-D'$, имеет место равенство $l(K-D'-mD)=0$. В результате мы для больших m получаем, что

$$l(D'+mD) \geqslant \frac{1}{2}(D'+mD)(D'+mD-K)+\chi(X), \tag{2.12}$$

откуда следует, что $l(D'+mD) \to \infty$ вместе с m. Это завершает доказательство предложения (2.1).

Докажем теперь теорему 1. Пусть H — произвольное гиперплоское сечение поверхности X. Так как, в силу утверждения (2.4),

$$H^2>0,$$

то квадратичная форма f на пространстве E обладает хотя бы одним положительным квадратом. Для доказательства того, что больше таких квадратов нет, достаточно показать, что для любого дивизора D, образ которого в пространстве $E=N \otimes R$ ортогонален к образу сечения H, т. е. для которого имеет место соотношение $D \cdot H=0$, выполнено неравенство $D^2 \leqslant 0$. Но из неравенства $D^2>0$, в силу предложения 2.1, следует существование такого целого n, что $l(nD)>1$, откуда, в силу утверждения (2.4), вытекает неравенство

$$nD \cdot H>0,$$

противоречащее соотношению $D \cdot H=0$.

Замечание. Пусть f — невырожденная квадратичная форма типа $(1, n-1)$ на векторном пространстве E. Очевидно, что множество Q векторов $x \in E$, для которых $f(x, x)>0$, состоит из двух связных компонент. При $x \in Q$ элементы $y \in Q$, принадлежащие к той же связной компоненте, что и x, характеризуются неравенством

$$f(x, y)>0.$$

Пользуясь утверждением (2.4), мы получаем отсюда, что если E является пространством Нерона — Севери неособой проективной поверхности X, то гиперплоские сечения поверхности X (при всех возможных проективных вложениях) определяют элементы пространства E, находящиеся в одной и той же связной компоненте множества Q, скажем P, а дивизоры D, для которых $D^2>0$ и $l(nD) \to \infty$ вместе с n, в точности совпадают с дивизорами, образы d которых в пространстве E принадлежат компоненте P. Кроме того, ясно, что замыкание $\overline{P}$ множества P представляет собой минимальный замкнутый выпуклый конус, содержащий эти элементы $d \in E$. Возникает вопрос, существует ли для такого дивизора D целое число $n>0$, такое, что дивизор nD

эквивалентен гиперплоскому сечению H. Из этого следовало бы, что $\overline{P}$ является также минимальным замкнутым выпуклым конусом, содержащим образы $h \in E$ гиперплоских сечений H. (Фактически это утверждение при заданной поверхности X равносильно первому.) Поскольку $\overline{P}$ совпадает с множеством тех $x \in E$, для которых $f(x, y) \geqslant 0$ при всех $y \in \overline{P}$ (что легко следует из того факта, что форма f имеет тип $(1, n-1)$), это последнее утверждение равносильно следующему: *если дивизор D таков, что $D \cdot H \geqslant 0$ для всякого гиперплоского сечения H, то $D^2 \geqslant 0$.* Отсюда тем более следовало бы, что для любого *положительного* дивизора D имеет место неравенство $D^2 \geqslant 0$. Известно, однако, что это свойство не всегда выполнено. (Например, если D является диагональю произведения $\Gamma \times \Gamma$, а род кривой Γ не меньше двух.)

3. До сих пор метод Маттука — Тэта по существу не использовался (если не считать использования неравенства Римана — Роха для поверхностей). Укажем теперь, как метод этих авторов, подходящим образом обобщенный, приводит к другим неравенствам, кроме неравенства Вейля. Мы будем опираться на следующую лемму.

Лемма 3.1. *Пусть X — неособая проективная поверхность, C — неприводимая кривая на поверхности X, $\widetilde{C}$ — ее нормализация, g — род кривой C, $P(X)$ и $P(\widetilde{C})$ — многообразия Пикара поверхности X и кривой $\widetilde{C}$ соответственно. Допустим, что*

$$\text{отображение } P(X) \to P(\widetilde{C}) \text{ эпиморфно и } C^2 \geqslant 0. \tag{3.1}$$

Пусть, далее, D — такой дивизор на поверхности X, что

$$D \cdot C \leqslant g - 1. \tag{3.2}$$

Пусть, наконец, k — поле определения для X, C, D, а d — общий над полем k элемент многообразия $P(X)$. Тогда $l(D+d)=0$.

Пусть $L(D')$ — векторное расслоение над поверхностью X, определенное классом дивизоров $D' = D + d$, а s — регулярное сечение расслоения $L(D')$ над X. Мы хотим показать, что $s = 0$. Пусть f — проекция $\widetilde{C} \to X$, а $f^*(D')$ — класс дивизоров на кривой C, являющийся прообразом класса D' относительно отображения f. В силу условий (3.1) и (3.2), это есть класс дивизоров степени $D \cdot C \leqslant g-1$, *общий* над полем k. Поэтому $l(f^*(D'))=0$ (см. теорему Римана — Роха для кривых). Следовательно, прообраз сечения s над кривой $\widetilde{C}$ равен нулю, т. е. сечение s аннулирует кривую C и, значит, является сечением расслоения $L(D'-C)$. Но, в силу неравенства $C^2 \geqslant 0$, дивизор $D - C$ на поверхности X удовлетворяет тому же условию (3.2), что и дивизор D. Поэтому то же самое рассуждение показывает, что s как сечение расслоения $L(D'-C)$ обращается в нуль на кривой C и, значит, является сечением расслоения $L(D'-2C)$. Продолжая рассуждение, мы получаем, что для любого целого n сечение s является сечением расслоения $L(D'-nC)$, т. е. обращается в нуль на кривой C с кратностью $\geqslant n$. Поскольку n произвольно, отсюда следует, что $s = 0$.

Теорема 3.2. *Пусть X — неособая проективная поверхность; C, C' — две неприводимые кривые на поверхности X, обе удовлетворяющие условиям* (3.1), *$\widetilde{C}$, $\widetilde{C}'$ — их нормализации, g, g' — их роды* *и π, π' — их виртуальные роды. Пусть, далее, $\delta = \pi - g$, $\delta' = \pi' - g'$, $\alpha = C^2$ и $\alpha' = C'^2$. Пусть, наконец, D — такой дивизор на поверхности X, что*

$$D \cdot C \leqslant g - 1 \text{ и } D \cdot C' \geqslant \pi' - 1 - \alpha' + \delta' = g' - 1 - \alpha' + 2\delta'. \tag{3.3}$$

Тогда

$$\chi(D) = \frac{1}{2} D(D - K) + \chi(X) \leqslant 0. \tag{3.4}$$

Доказательство. Пусть k — поле определения для X, C, C', D, а d — элемент многообразия $P(X)$, общий над полем k. Пусть, далее, $D' = D + d$. В силу леммы 3.1, $l(D') = 0$. Применим теперь эту лемму к дивизору $K - D$ и кривой C'. Условие

$$(K - D) \cdot C' \leqslant g' - 1$$

выполнено в силу второго неравенства (3.3) и хорошо известной формулы

$$\pi' = \frac{1}{2} C'(C' + K) + 1. \tag{3.5}$$

Следовательно, $l(K - D') = 0$. Поэтому из неравенства Римана — Роха (2.1), примененного к дивизору D', вытекает, что $\chi(D') = 0$. Так как $\chi(D') = \chi(D)$, то неравенство (3.4) доказано.

Заметим, что теорему 1.1 можно легко доказать, если постулировать существование кривых C, C' и дивизора D, обладающих свойствами, сформулированными в теореме 3.2. (Неравенство (3.4) остается справедливым при замене дивизора D дивизором $D + mD'$, где D' — дивизор, ортогональный к кривым C и C'.) Укажем теперь несколько неравенств другого характера, вытекающих из неравенства (3.4).

Следствие 3.1. *Пусть X — неособая проективная поверхность, C — неприводимая кривая на поверхности X, $\tilde{C}$ — ее нормализация, g — род, а π — виртуальный род кривой C. Пусть, далее, $\alpha = C^2$ и $\delta = \pi - g$. Оказывается, что*

$$\text{если } \alpha \geqslant 2\delta, \text{ гомоморфизм } P(X) \to P(\tilde{C}) \text{ есть эпиморфизм} \tag{3.6}$$

и канонический класс K поверхности X имеет вид $2K'$, где K' — некоторый класс дивизоров, который мы обозначаем через $K/2$, то

$$\chi(K/2) \leqslant 0. \tag{3.7}$$

Применим теорему 2, полагая $C = C'$. Условия, наложенные на кривые C и C', выполнены, а условия (3.3) относительно дивизора D имеют вид

$$g - 1 - (\alpha - 2\delta) \leqslant D \cdot C \leqslant g - 1. \tag{3.3$'$}$$

Условие $\alpha \geqslant 2\delta$ как раз и означает, что крайние члены в неравенстве (3.3′) имеют требуемый порядок следования. Поскольку их полусумма, в силу формулы (3.5), равна в точности $C \cdot K/2$, можно положить $D = K/2$ и неравенство (3.4) превратится в неравенство (3.7). Заметим еще, что

$$\chi(K/2) = \frac{1}{2}(K/2) \cdot (-K/2) + \chi(X) = -\frac{1}{8} K^2 + \chi(X),$$

так что неравенство (3.7) равносильно неравенству

$$K^2 \leqslant 8\chi(X). \tag{3.7$'$}$$

Далее, пользуясь формулой Цейтена — Сегре

$$\chi(X)=\frac{1}{12}(K^2+E)$$

и определяя *индекс* поверхности X формулой Тома — Хирцебруха

$$\tau=\frac{1}{3}(K^2-2E)$$

(здесь E означает характеристику Эйлера — Пуанкаре поверхности X или, если угодно, ее последний класс Чженя), мы получаем, что

$$\chi(K/2)=-\frac{1}{24}\tau, \tag{3.8}$$

так что неравенство (3.7) равносильно неравенству

$$\tau\geqslant 0. \tag{3.7''}$$

Следствие 2. *Сохраняя прежние обозначения предположим, что $g=0$ и $\alpha\geqslant 2\delta$. Если для дивизора D имеют место неравенства $-1-(\alpha-2\delta)\leqslant D\cdot C\leqslant -1$, то $\chi(D)\leqslant 0$. В частности, если на поверхности X существует неособая неприводимая кривая рода нуль, для которой $C^2>0$, то $\chi(X)\leqslant 1$.*

Применим теорему 3.2, полагая в ней $C=C'$. Условия (3.1) выполнены, ибо $P(\widetilde{C})=0$. Условие относительно дивизора D во втором случае имеет вид

$$-1-\alpha\leqslant D\cdot C\leqslant -1.$$

Можно взять $D=-C$, откуда вытекает, что $\chi(-C)=0$. Но $\chi(-C)=$ $=\frac{1}{2}C(C+K)+\chi(X)$, т. е., в силу формулы (3.5), $\pi-1+\chi(X)$, а так как $\pi=g+\delta=0$ (ибо $g=0$, $\delta=0$), то $-1+\chi(X)\leqslant 0$, т. е. $\chi(X)\leqslant 1$.

Следствие 3. *Пусть X — неособая проективная поверхность и $(C_t)_{t\in T}$ — алгебраическое семейство неприводимых кривых на поверхности X. Допустим, что пересечение всех кривых C_t пусто и $C_t^2=1$ (для одного или всех значений t, что одно и то же). В этих условиях для любого значения t кривая C_t не имеет особенностей, а гомоморфизм $P(X)\to P(C_t)$ является эпиморфизмом. Кроме того, имеет место неравенство*

$$\chi(X)\leqslant(g-1)(g-2), \tag{3.9}$$

где g — общий род кривых C_t.

Пусть T' — открытое подмножество многообразия параметров, состоящее из таких точек s, что $C_s\neq C_t$. Подмножество T' непусто и, в силу соотношения $C_t\cdot C_s=1$, пересечение $C_t\cdot C_s$ сводится к одной точке $a_s\in C_t$. При переменной точке s точки a_s образуют алгебраическое семейство циклов на кривой C_t, которое непостоянно, ибо пересечение общих кривых C_s и C_t пусто. Следовательно, на кривой C_t существует открытое множество U, состоящее из точек a_s. Пусть $P(C_t)$ — *обобщенное* якобиево многообразие кривой C_t (априори, кривая C_t может иметь особенности). Имеет место естественный гомоморфизм $P(X)\to P(C_t)$, образ которого состоит из образов $a_s-a_{s'}$ дивизоров $C_s-C_{s'}(s, s'\in T')$, т. е. классов всех циклов вида $a-b$ $(a, b\in U)$. Следовательно, этот образ плотен в $P(C_t)$; поскольку многообразие $P(X)$ полно, $P(C_t)$ также полно, и потому кривая C_t не имеет особенностей. Кроме того, гомоморфизм $P(X)\to P(C_t)$ является эпиморфизмом. Следовательно, можно применить теорему 3.2: для любого дивизора D, для которого $g-2 \leqslant D\cdot C_t \leqslant g-1$, имеет место неравенство $\chi(D) \leqslant 0$. Положив, в частности, $D=(g-1)C_t$, мы получаем, что

$$(g-1)^2 C^2-(g-1)C\cdot K+2\chi(X) \leqslant 0.$$

Пользуясь формулой (3.5) и равенством $C^2=1$, получаем отсюда неравенство (3.9).

Следствие 4. *Пусть X — неособая проективная поверхность и C — неособая неприводимая кривая на поверхности X, для которой $C^2>0$, и гомоморфизм $P(X)\to P(C)$ является эпиморфизмом. Введем билинейную форму*

$$f_C(D,\ D')=\alpha D\cdot D'-(D\cdot C)(D'\cdot C), \tag{3.10}$$

где $\alpha=C^2$, и положим $2a=K\cdot C$. Тогда квадратичная форма, связанная с билинейной формой f_C, отрицательна, и для любого дивизора D имеет место соотношение

$$f_C(D,\ D-K)+2\alpha\chi(X)-a^2 \leqslant 0. \tag{3.11}$$

Первое утверждение следует из теоремы 1.1, если учесть, что $C^2>0$, откуда получается (см. (1.3)), что $(C^2)(D^2)-(C\cdot D)^2 \leqslant 0$. Кроме того, $f_C(D,\ D)=0$ для $D=nC$, так что значение $f_C(D,\ D')$ не меняется при прибавлении к аргументам кратных дивизора nC. Для любого дивизора D немедленно проверяется формула

$$2\alpha\chi(D)=f_C(D,\ D-K)+2\alpha\chi(X)+y^2-2ay, \text{ где } y=D\cdot C. \tag{3.12}$$

Но для действительных y имеем $y^2-2ay \geqslant -a^2$, так что $2\alpha\chi(D)$ мажорирует левую часть неравенства (3.11). Эта левая часть не меняется при прибавлении к дивизору D кратных дивизора C. Подберем такое целое число x, чтобы дивизор $D'=D+xC$ удовлетворял неравенствам

$$g-1-\alpha \leqslant D'\cdot C \leqslant g-1;$$

эти неравенства можно записать в виде $g-1-\alpha \leqslant \alpha x+y \leqslant g-1$, так что такое число x всегда существует. Затем применим теорему 3.2, в силу которой $\chi(D') \leqslant 0$, т. е. $2\alpha\chi(D+xC) \leqslant 0$. Поскольку левая часть здесь мажорирует левую часть неравенства (3.11), неравенство (3.11) доказано. Полагая в нем $D=0$, мы, в силу формулы (3.5), получаем, что

$$2\alpha\chi(X) \leqslant (g-1-\alpha/2)^2. \tag{3.13}$$

Замечание. Следствие 1 становится неверным, если не предполагать, что $K/2$ является классом дивизоров. В самом деле, все предположения, кроме этого последнего, выполняются, если X есть *рациональная* неособая поверхность. Но исходя из такой поверхности, можно без труда построить бирационально эквивалентную ей поверхность, индекс которой отрицателен (что противоречит неравенству (3.7″)). В самом деле, легко проверить, что если выколоть точку на проективной неособой поверхности, то ее индекс уменьшится на единицу. (Это замечание и интерпретация неравенства (3.7) с помощью индекса сообщены мне Серром.)

Разнообразие следствий, которые получаются из теоремы (3.2), обязано своим происхождением тому обстоятельству, что теорема относится не к произвольному элементу введенного выше пространства Нерона — Севери E, но к элементу „решетки“, порожденной дивизорами поверхности X. Заметим еще, что в случае, когда поверхность X есть произведение двух кривых C, C', теорема 3.2 не дает ничего, кроме неравенства Вейля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bronowski G., Curves whose grade is not positive in the theory of the base, *J. London Math. Soc.*, **13** (1938), 86.
2. Hodge W. V. D., Note on the theory of the base for curves an algebraic surface, *J. London Math. Soc.*, **12** (1937), 58.
3. Lang S., Serre J. P., Sur les revêtements non ramifiés des variétés algébriques, *Amer. J. Math.*, **79** (1957), 319.
4. Mattuck A., Tate J., On the inequality of Castelnuovo — Severi, *Hamb. Abh.*, **22** (1958), 295. [Есть русский перевод; см. стр. 25—28 этого сборника.]
5. Néron A., Problèmes arithmétiques et géométriques rattachés à la notion de rang d'ne courbe dans un corps, *Bull. Soc. Math. France*, **80** (1952), 101.
6. Segre B., Intorno ad un teorema di Hodge sulla teoria della base per le curve di una superficie algebrica, *Annali Math.*, **16** (1937), 167.
7. Weil A., Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent. Actuelités Scient. Ind., 1041, Paris, Hermann.
8. Weil A., Sur les critères d'équivalence en Géomètrie Algébrique, *Math. Ann.*, **128** (1954), 95.