Sur une note de Mattuck-Tate.

Par *A. Grothendieck* à Paris.

Dedicated to E. Artin for his 60^{th} birthday.

---

1. Dans un travail récent [4], Mattuck et Tate déduisent l'inégalité fondamentale de A. Weil qui établit l'hypothèse de Riemann pour les corps de fonctions [7] comme conséquence facile du théorème de Riemann-Roch pour les surfaces. En essayant de comprendre la portée exacte de leur méthode, je suis tombé sur l'énoncé suivant, connu en fait depuis 1937 [2] [6] [1] (comme me l'a signalé J. P. Serre), mais apparemment peu connu et utilisé:

Théorème 1. 1. (*Hodge-Segre-Bronowski*). *Soient X une surface projective non singulière, $\mathfrak{P}$ le groupe des classes de diviseurs sur X (pour l'équivalence linéaire), P la variété de Picard de X, et $N = \mathfrak{P}/P$ le groupe de Néron-Sévéri de X. Soit $E = N \otimes R$, considérons sur N la forme bilinéaire symétrique f déduite de l'application $(D, D') \to D \cdot D'$ de $\mathfrak{P} \times \mathfrak{P}$ dans Z, et soit aussi f la forme bilinéaire sur $E \times E$ qui s'en déduit. Si E est de dimension n, alors f est non dégénérée de type $(1, n-1)$.*

Ce théorème semble utiliser, dans son énoncé, le théorème de Néron [5] impliquant que E est de dimension finie. Il serait évident comment formuler le théorème 1 si on voulait ignorer le théorème de Néron. Signalons tout de suite que le fait que f soit non dégénérée est un cas particulier d'un résultat de A. Weil [8], valable pour des variétés X de dimension quelconque. Quant à l'autre assertion du théoreme 1, savoir que dans f intervient exactement un carré positif, [1] [6] en donnent des démonstrations assez simples, valables en toute caractéristique. Nous allons en donner au N° 2 une démonstration encore plus simple, en utilisant un résultat auxiliaire (prop. 1) ayant quelque intérêt propre. Nous allons indiquer dans ce numéro comment on tire du théorème 1 diverses inégalités remarquables, incluant celle de A. Weil.

De façon générale, soit f une forme bilinéaire symétrique de type $(1, n-1)$ sur un espace vectoriel E de dimension n. Soit F un sous-espace vectoriel de E contenant un élément x tel que $f(x, x) \geqq 0$. Alors la restriction de f à l'orthogonal F^0 de F est négative, et même définie négative si la restriction de f à F est non dégénérée. Si par exemple x, y, z sont trois éléments de E tels que $f(x, x) \geqq 0$, alors $u = yf(x, z) - zf(x, y)$ est orthogonal à x, et par suite $f(u, u) \leqq 0$, donc

$$(1.\ 1) \qquad f(x, z)^2 f(y, y) + f(x, y)^2 f(z, z) - 2f(x, y)\, f(y, z)\, f(z, x) \leqq 0\,, \quad \text{si } f(x, x) \geqq 0\,.$$

D'ailleurs on ne peut avoir égalité dans (1. 1) que si $f(x, x) = 0$ ou $yf(x, z) - zf(x, y) = 0$.

Soient $x_i (1 \leqq i \leqq m)$ des éléments de E, et soit

$$g(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(\Sigma\lambda_i x_i, \Sigma\lambda_i x_i)\,.$$

Cette forme quadratique est soit dégénérée, soit de type $(1, m-1)$, soit définie négative, ces faits ayant lieu suivant que le déterminant dét $(f(x_i, x_j))$ est nul, ou a le signe de $(-1)^{m-1}$, ou le signe de $(-1)^m$. On est dans l'un des deux premiers cas si et seulement si il existe une combinaison linéaire non triviale des x_i, soit x, telle que $f(x, x) \geqq 0$. Donc cette condition est remplie si et seulement si on a

$$(1.\,2) \qquad (-1)^{m-1} \operatorname{dét}(f(x_i, x_j)) \leqq 0 .$$

D'ailleurs, on vérifie très facilement que si un sous-espace vectoriel F de E contient un élément x tel que $f(x, x) > 0$, alors la restriction de f à F est non dégénérée. Par suite, l'inégalité stricte dans (1. 2) est équivalente au fait que l'espace vectoriel F engendré par les x_i soit de dimension m, et contienne un x tel que $f(x, x) > 0$. On peut dire encore que si il existe $x \in F$ avec $f(x, x) > 0$, alors l'inégalité (1. 2) est satisfaite, et c'est une égàlité si et seulement si les x_i sont linéairement dépendants.

Spécialisons aux cas $m = 2$ et $m = 3$, on obtient les inégalités

$$(1.\,3) \qquad f(x, x) f(y, y) \leqq f(x, y)^2$$

$$(1.\,4) \qquad f(x, x) f(y, z)^2 + f(y, y) f(z, x)^2 + f(z, z) f(x, y)^2 \\ - f(x, x) f(y, y) f(z, z) - 2 f(x, y) f(y, z) f(z, x) \leqq 0$$

valables si et seulement si il existe une combinaison linéaire non triviale u de x, y (resp. de x, y, z) telle que $f(u, u) \geqq 0$, l'égalité ne pouvant avoir lieu que si x, y (resp. x, y, z) sont linéairement dépendants, *ou* f négative sur l'espace qu'ils engendrent. En particulier, l'inégalité (1. 3) implique (1. 4), et si (1. 3) est une inégalité stricte, alors (1. 4) n'est une égalité que si z est combinaison linéaire de x et y. Supposons par exemple qu'on ait

$$(1.\,5) \qquad f(x, x) = f(y, y) = 0, \; f(x, y) = 1 ,$$

alors quel que soit z, on a l'inégalité

$$(1.\,6) \qquad f(z, z) - 2 f(z, x) f(z, y) \leqq 0$$

qui est une égalité si et seulement si on a

$$(1.\,7) \qquad z = x f(z, y) + y f(z, x) .$$

On peut d'ailleurs interpréter le premier membre de (1. 6) comme $f(u, u)$, où u est la projection orthogonale de z sur l'orthogonal du plan engendré par x, y. D'ailleurs (1. 6) est aussi un cas particulier de (1. 1), mais le cas d'égalité n'est pas donné par les considérations de (1. 1).

Le cas de A. Weil est celui où E est l'espace de Néron-Sévéri associé à une surface X produit de deux courbes projectives non singulières Γ_1 et Γ_2. Prenant un point e_i dans Γ_i $(i = 1, 2)$, on considère les classes dans E des diviseurs $\Gamma_1 \times e_2$ et $e_1 \times \Gamma_2$, soient x, y. Les relations (1. 5) sont satisfaites, d'où pour toute classe de diviseurs D sur $X = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ l'inégalité de A. Weil

$$(1.\,8) \qquad D^2 - 2 \mu(D) \nu(D) \leqq 0$$

où $\mu(D)$ et $\nu(D)$ sont les „degrés partiels" de D

$$\mu(D) = D \cdot (\Gamma_1 \times e_2), \; \nu(D) = D \cdot (e_1 \times \Gamma_2) .$$

En vertu de ce qui précède, (1. 8) est une égalité si et seulement si on a

$$D = \mu(D) (e_1 \times \Gamma_2) + \nu(D) (\Gamma_1 \times e_2) + D ,$$

où D' est un diviseur tel que son image dans E soit nulle, i. e. tel que son image dans $N = \mathfrak{P}/P$ soit un élément de torsion. On peut en conclure (d'après J. P. Serre) que en fait $D' \in P$ (ce qui redonne le résultat complet de Weil). En d'autres termes, on a le résultat suivant: *le groupe de Néron-Sévéri N de $X = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ est sans torsion.* Nous ne démontrerons pas ici ce fait, nous contentant d'indiquer qu'il est un cas particulier du résultat suivant, dû à J. P. Serre, et qui résulte facilement de [3]: Pour toute variété non singulière projective X, soit $T(X)$ le groupe des classes de diviseurs sur X dont un multiple entier convenable est algébriquement équivalent à zéro. Alors on a la formule suivante d'additivité:

$$T(X \times Y) = T(X) \times T(Y). \tag{1.9}$$

2. Nous allons déduire le théorème 1 d'une proposition auxiliaire, que nous énoncerons avec plus de précision qu'il ne sera nécessaire pour notre objet.

Si D est un diviseur sur X, nous désignons par $l(D)$ la dimension de l'espace vectoriel des fonctions f sur X telles que $(f) \geqq -D$. Donc $l(D)$ ne dépend que de la classe de D. Rappelons *l'inégalité de Riemann-Roch*

$$l(D) + l(K - D) \geqq \tfrac{1}{2} D(D - K) + \chi(X) \tag{2.1}$$

où K est la *classe de diviseurs canonique* sur X, *et* $\chi(X)$ le *genre arithmétique* de X. Rappelons que cette inégalité résulte de l'égalité de Riemann-Roch

$$\sum_0^2 (-1)^i \dim H^i(X, \underline{O}(D)) = \tfrac{1}{2} D(D - K) + \chi(X)$$

(qui se démontre maintenant de façon très élémentaire), et du théorème de dualité de Serre

$$\dim H^2(X, \underline{O}(D)) = \dim H^0(X, \underline{O}(K - D)). \tag{2.2}$$

Notons aussi l'inégalité évidente

$$l(D + D') \geqq l(D') \quad \text{si} \quad l(D) > 0 \tag{2.3}$$

Enfin, rappelons aussi que, si H est une section hyperplane de X (dans une immersion projective de X), alors

$$l(D) > 1 \ \text{implique}\ D \cdot H > 0 \tag{2.4}$$

car $l(D) > 1$ implique que D est équivalent à un diviseur strictement positif D', et d'autre part on peut trouver une section hyperplane H' équivalente à H n'ayant aucune composante commune avec D', d'où $D \cdot H = D'H' > 0$.

Proposition 2.1. *Soit D un diviseur tel que $D^2 > O$. Alors remplaçant au besoin D par $-D$, on aura $l(-nD) = 0$ pour tout entier $n > 0$, et alors pour tout diviseur D', on aura $l(D' - nD) = 0$ pour n assez grand, et $l(D' + nD)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.*

Soit

$$M = 1 + \operatorname{Sup}(1, l(2K)). \tag{2.5}$$

On voit sur (2.1) appliqué à mD que l'on peut trouver un entier $n \geqq 0$ tel que $l(mD) + l(K - mD) \geqq 2M$ pour $|m| \geqq n$, d'où

$$l(mD) \geqq M \ \text{ou}\ l(K - mD) \geqq M \ \text{pour}\ |m| \geqq n. \tag{2.6}$$

Bornons nous aux entiers m tels que $|m| \geqq n$. On a

$$l(K - mD) \geqq M \ \text{implique}\ l(K + mD) = 0 \ \text{et}\ l(-mD) \geqq M. \tag{2.7}$$

En effet, si on avait $l(K + mD) > 0$, on conclurait de (2.3) que $l(K + mD + K - mD) \geqq M$, ce qui contredit (2.5). On a donc $l(K + mD) = 0$, donc $l(-mD) \geqq M$ en vertu de (2.6) appliqué à $-m$. Donc comparant (2. 6) et (2. 7) on voit que $l(mD) \geqq M$ ou $l(-mD) \geqq M$. Changeant au besoin D de signe, on voit que l'on aura

$$l(mD) \geqq M. \tag{2. 8}$$

On en tire

$$l(-mD) = 0 \tag{2. 8'}$$

car autrement on conclurait de (2. 3) que $l(mD - mD) = 1 \geqq M$, ce qui contredit (2. 5). Appliquant (2. 6) à $-m$, on en tire

$$l(K + mD) \geqq M \tag{2. 8''}$$

d'où, appliquant (2. 7) à $-m$

$$l(K - mD) = 0. \tag{2. 8'''}$$

On a donc démontré que si $|m| \geqq n$, on a les 4 inégalités précédentes, ou celles qui s'en déduisent en remplaçant D par $-D$. Il en résulte aussitôt que pour $|m| \geqq n$, chacune de ces 4 inégalités entraine toutes les autres. Supposons que pour $m = n$, ce soient les inégalités écrites ci-dessus qui soient valables (ce qui est loisible). Je dis qu'il en est de même pour tout $m > n$. On tire en effet de (2. 3) et (2. 8): $l(knD) \geqq M$ si $k > 0$, d'où en vertu de ce qu'on vient de dire $l(-knD) = 0$, d'où a fortiori, en vertu de (2. 3):

$$l(-kD) = 0 \text{ pour } k > 0. \tag{2. 9}$$

Faisant $k = m$, cela donne (2. 8'), d'où toutes les inégalités (2. 8) à (2. 8'''). De cette dernière relation on tire, compte tenu de (2. 1):

$$l(mD) \geqq \tfrac{1}{2} mD(mD - K) + \chi(X) \quad \text{si } |m| \geqq n. \tag{2. 10}$$

Soit maintenant D' un diviseur quelconque sur X, prouvons que

$$l(D' - mD) = 0 \quad \text{pour } m \text{ grand}. \tag{2. 11}$$

Soit en effet $n' \geqq n$ tel que $m \geqq n'$ implique $l(mD) > l(D')$ (un tel n' existe en vertu de (2. 10)). Si pour un tel m, on avait $l(D' - mD) > 0$, on en conclurait en vertu de (2. 3): $l(D' - mD + mD) > l(D')$, ce qui est absurde. Cela établit (2. 11) pour tout D'. Appliquons enfin l'inégalité (2. 1) au diviseur $D' + mD$, en tenant compte que $l(K - D' - mD) = 0$ pour m grand en vertu de (2. 11), appliqué à $K - D'$. On trouve

$$l(D' + mD) \geqq \tfrac{1}{2}(D' + mD)(D' + mD - K) + \chi(X) \tag{2. 12}$$

pour m grand ce qui montre bien que $l(D' + mD)$ tend vers $+\infty$ avec m, et achève la démonstration de prop. 2. 1.

Prouvons maintenant le théorème 1. Soit H une section hyperplane de X, on a alors

$$H^2 > 0$$

en vertu de (2. 4), ce qui implique que la forme quadratique f sur E comporte au moins un carré positif. Pour montrer que f n'en a pas d'autres, il suffit de prouver que si D est un diviseur dont l'image dans $E = N \otimes R$ est orthogonale à celle de H, i. e. tel que $D \cdot H = 0$, alors on a $D^2 \leqq 0$. Or si on avait $D^2 > 0$, alors en vertu de proposition 2. 1 il existerait un n tel que $l(nD) > 1$, d'où en vertu de (2. 4)

$$nD \cdot H > 0$$

contrairement à l'hypothèse $D \cdot H = 0$, cqfd.

Remarque. Soit f une forme quadratique non dégénérée de type $(1, n-1)$ sur un espace vectoriel E. On voit alors aussitôt que l'ensemble Q des $x \in E$ tels que $f(x, x) > 0$

a deux composantes connexes. Si $x \in Q$, les éléments y de Q qui sont dans la même composante connexe que x sont caractérisés par l'inégalité

$$f(x, y) > 0.$$

Utilisant (2. 4), on voit que si E est l'espace de Néron-Sévéri d'une surface projective non singulière X, alors les sections hyperplanes de X (pour tous les plongements projectifs possibles) définissent des éléments de E qui sont dans une même composante connexe de Q, soit P, et que les diviseurs D avec $D^2 > 0$, pour lesquels $l(nD)$ tend vers $+\infty$ avec n (cf prop. 2. 1) sont exactement ceux dont l'image d dans E est dans P. D'ailleurs, on voit aussitôt que P est le plus petit cône convexe ferme contenant ces éléments d de E. On peut se demander si pour un tel D, il existe un entier $n > 0$ tel que nD soit équivalent à une section hyperplane H. Cela implique (et est en fait équivalent, pour X donné) que $\bar{P}$ est aussi le plus petit cône convexe fermé contenant les images h dans E de sections hyperplanes H. Comme $\bar{P}$ est identique à l'ensemble des $x \in E$ tels que $f(x, y) \geqq 0$ pour tout $y \in \bar{P}$ (comme il résulte facilement du fait que f est de type $(1, n-1)$), ce dernier fait équivaut par polarité au suivant: *Si D est un diviseur tel que $D \cdot H \geqq 0$ pour toute section hyperplane H, alors $D^2 \geqq 0$.* Cela implique a fortiori que pour tout diviseur *positif* D, on a $D^2 \geqq 0$. Or on sait que cette propriété n'est pas toujours vérifiée (par exemple dans le cas où D est la diagonale dans $\Gamma \times \Gamma$, où Γ est une courbe de genre $\geqq 2$).

3. Ce qui précède n'utilisait pas à proprement parler la méthode de Mattuck-Tate (si ce n'est en utilisant l'inégalité de Riemann-Roch sur les surfaces). Nous allons indiquer maintenant comment la méthode de ces auteurs, convenablement généralisée, donne d'autres inégalités que celle de A. Weil. Nous nous appuirons sur le

Lemme 3. 1. *Soient X une surface projective non singulière, C une courbe irréductible dans X, $\tilde{C}$ sa normalisée, g le genre de C, $P(X)$ et $P(C)$ la variété de Picard de X et de $\tilde{C}$. On suppose*

$$P(X) \to P(\tilde{C}) \text{ est surjectif, et } C^2 \geqq 0. \tag{3. 1}$$

Soit D un diviseur sur X tel que

$$D \cdot C \leqq g - 1. \tag{3. 2}$$

Soit k un corps de définition pour X, C, D, et soit d un élément de $P(X)$ générique sur k. Alors on a $l(D + d) = 0$.

Soit $L(D')$ le fibré vectoriel sur X défini par la classe de diviseurs $D' = D + d$, et soit s une section régulière de $L(D')$ sur X, nous voulons montrer que $s = 0$. Soit f la projection de $\tilde{C}$ dans X, soit $f^*(D')$ la classe de diviseurs sur C image inverse par f de D'. En vertude (3. 1) et (3. 2), c'est une classe de diviseus degré $D \cdot C \leqq g - 1$ *générique* sur k. Il est bien connu qu'on a alors $l(f^*(D')) = 0$ (conséquence du théorème de Riemann-Roch sur une courbe). Donc l'image inverse de s sur $\tilde{C}$ est nulle, i. e. s s'annule C, donc s est une section de $L(D' - C)$. Or en vertu de $C^2 \geqq 0$, le diviseur $D - C$ sur X satisfait la même condition (3. 2) que D. Appliquant le résultat précédent, on voit que s, en tant que section de $L(D' - C)$, s'annule sur C, donc est une section de $L(D' - 2C)$. On voit ainsi de proche en proche que pour tout entier n, s est une section de $L(D' - nC)$, i. e. s s'annule avec l'ordre n au moins sur C. Comme n est arbitraire, cela implique bien $s = 0$.

Théorème 3. 2. *Soient X une surface projective non singulière, C, C' deux courbes irréductibles sur X satisfaisant toutes les deux aux conditions écrites pour C dans* (3. 1).

Soient $\widetilde{C}$, $\widetilde{C}'$ leurs normalisées, g, g' leurs genres, π, π' leurs genres virtuels. Soient enfin $\delta = \pi - g$, $\alpha = C^2$, et définissons de même δ', α'. Soit D un diviseur sur X tel que

(3. 3) $\quad D \cdot C \leqq g - 1 \quad$ *et* $\quad D \cdot C' \geqq \pi' - 1 - \alpha' + \delta' = g' - 1 - \alpha' + 2\delta'.$

Alors on a

(3. 4) $$\chi(D) = \tfrac{1}{2} D(D - K) + \chi(X) \leqq 0\,.$$

Démonstration. Soit k un corps de définition pour X, C, C', D, et soit d un élément de $P(X)$ générique sur k. Soit $D' = D + d$. En vertu du lemme 3. 1 on a $l(D') = 0$. Appliquons maintenant ce même lemme à $K - D$ et à C'. On a bien

$$(K - D) \cdot C' \leqq g' - 1$$

comme il résulte aussi tôt de la deuxième inégalité (3. 3) et de la formule bien connue

(3. 5) $$\pi' = \tfrac{1}{2} C'(C' + K) + 1\,.$$

Par suite on a $l(K - D') = 0$. Par suite l'inégalité de Riemann-Roch (2. 1) appliquée à D' donne $\chi(D') \leqq 0$. Comme $\chi(D') = \chi(D)$, l'inégalité (3. 4) s'ensuit.

Dans le cas où C, C', D avec les propriétés indiquées dans le théorème 3. 2 existent, il est facile d'en déduire le théorème 1. 1. (On écrit que (3. 4) reste vrai quand on remplace D par $D + mD'$, où D' est un diviseur orthogonal à C et C'). Nous allons donner des inégalités d'une autre nature conséquences de (3. 4):

Corollaire 1. *Soient X une surface projective non singulière, C une courbe irréductible sur X, $\widetilde{C}$ sa normalisée, g le genre de C et π le genre virtuel de C, on pose $\alpha = C^2$, $\delta = \pi - g$, et on suppose:*

(3. 6) $\quad \alpha \geqq 2\delta$ *et l'homomorphisme* $P(X) \to P(\widetilde{C})$ *est surjectif.*

Enfin on suppose que la classe canonique K de X est de la forme $2K'$, où K' est une classe de diviseurs, qu'on notera $K/2$. Sous ces conditions on a

(3. 7) $$\chi(K/2) \leqq 0\,.$$

On applique le théorème 3. 2 avec $C = C'$. Les conditions sur C et C' sont vérifiées, et la condition (3. 3) pour un diviseur D s'écrit

(3. 3 bis) $$g - 1 - (\alpha - 2\delta) \leqq D \cdot C \leqq g - 1\,.$$

La condition $\alpha \geqq 2\delta$ dans (3. 6) signifie que les termes extrêmes dans (3. 3 bis) ont bien la relation d'inégalité voulue; comme leur demi-somme est précisément $C \cdot K/2$ en vertu de (3. 5), on peut prendre $D = K/2$, et l'inégalité (3. 7) n'est autre que (3. 4). Remarquons d'ailleurs que

$$\chi(K/2) = \tfrac{1}{2}(K/2) \cdot (-K/2) + \chi(X) = -\tfrac{1}{8}K^2 + \chi(X)$$

donc (3. 7) s'écrit aussi

(3. 7 bis) $$K^2 \leqq 8\,\chi(X)\,.$$

D'ailleurs, utilisant la formule de Zeuthen-Segre

$$\chi(X) = \tfrac{1}{12}(K^2 + E)$$

et définissant l'*index* de X par la formule de Thom-Hirzebruch

$$\tau = \tfrac{1}{3}(K^2 - 2E)$$

(E étant la caractérisitique d'Euler-Poincaré de X, où si on veut sa dernière classe de Chern), on trouve

(3. 8) $$\chi(K/2) = -\frac{1}{24}\,\tau$$

de sorte que (3. 7) est équivalent à la formule

(3. 7 ter) $$\tau \geqq 0.$$

Corollaire 2. *Les notations étant comme ci-dessus, on suppose $g = 0$ et $\alpha \geqq 2\delta$. Si D est un diviseur tel que DC soit compris entre $-1-(\alpha-2\delta)$ et -1, alors on a $\chi(D) \leqq 0$. En particulier, s'il existe sur X une courbe irréductible non singulière de genre 0 telle que $C^2 > 0$, alors $\chi(X) \leqq 1$.*

On applique le théorème 3. 2 avec $C = C'$, la conditions (3. 1) est vérifiée puisque $P(\tilde{C}) = 0$. La condition sur D s'écrit, dans le deuxième cas:

$$-1-\alpha \leqq D \cdot C \leqq -1$$

et on peut prendre $D = -C$, on trouve $\chi(-C) \leqq 0$. Or le premier membre est $\frac{1}{2} C(C+K) + \chi(X)$, donc en vertu de (3. 5) c'est $\pi - 1 + \chi(X)$, et comme $\pi = g + \delta = 0$ (puisque $g = 0$, $\delta = 0$), on trouve $-1 + \chi(X) \leqq 0$, i. e. $\chi(X) \leqq 1$.

Corollaire 3. *Soient X une surface projective non singulière, $(C_t)_{t \in T}$ une famille algébrique de courbes irréductibles sur X. On suppose que l'intersection des C_t est vide, et que $C_t^2 = 1$ (pour un t ou tout t, cela revient au même). Sous ces conditions, pour tout t, C_t est non singulière et l'homomorphisme $P(X) \to P(C_t)$ est surjectif. Si g est le genre commun des C_t, on a*

(3. 9) $$\chi(X) \leqq (g-1)(g-2).$$

Soit T' la partie ouverte de la variété des paramètres des s tels que $C_s \neq C_t$. T' n'est pas vide, et comme $C_t \cdot C_s = 1$, le cycle intersection $C_t \cdot C_s$ est réduit à un point a_s sur C_t. Quand s varie, les a_s forment une famille algébrique de cycles sur C_t, non constante puisque l'intersection des C_s et de C_t est vide. Par suite, il existe un ouvert U sur C_t formé de points de la forme a_s. Soit $P(C_t)$ la variété jacobienne *généralisée* de C_t (C_t a priori peut avoir des singularités). On a un homomorphisme naturel $P(X) \to P(C_t)$, dont l'image contient les images $a_s - a_{s'}$ des diviseurs $C_s - C_{s'}$ ($s, s' \in T'$), donc les classes de tous les cycles $a - b$ ($a, b \in U$). Par suite, cette image est dense. Comme $P(X)$ est complète, $P(C_t)$ est complète, ce qui implique que C_t est non singulière. De plus, l'homomorphisme $P(X) \to P(C_t)$ est surjectif. On peut donc appliquer le théorème 3. 2: pour tout diviseur D tel que $D \cdot C_t$ soit compris entre $g-1-1 = g-2$ et $g-1$, on a $\chi(D) \leqq 0$. On peut prendre en particulier $D = (g-1)C_t$, on trouve

$$(g-1)^2 C^2 - (g-1)\, C \cdot K + 2\,\chi(X) \leqq 0.$$

Utilisant $C^2 = 1$ et (3. 5), on trouve l'inégalité (3. 9).

Corollaire 4. *Soient X une surface projective non singulière, C une courbe irréductible non singulière sur X telle que $C^2 > 0$ et que l'homomorphisme $P(X) \to P(C)$ soit surjectif. Introduisons la forme bilinéaire*

(3. 10) $$f_C(D, D') = \alpha D \cdot D' - (D \cdot C)(D' \cdot C)$$

où on pose $\alpha = C^2$. Soit $2a = K \cdot C$. Alors la forme quadratique associée à la forme bilinéaire f_C est négative, et pour tout diviseur D, on a

(3. 11) $$f_C(D, D-K) + 2\alpha\chi(X) - a^2 \leqq 0.$$

La première assertion résulte du théorème 1. 1., compte tenu que $C^2 > 0$, qui donne (cf (1. 3)): $(C^2)(D^2) - (C \cdot D)^2 \leqq 0$. On a d'ailleurs $f_C(D, D) = 0$ pour $D = nC$, donc $f_C(D, D')$ ne change pas quand on ajoute à ses arguments des multiples de C. Soit D un diviseur quelconque, on vérifie aussitôt la formule

(3. 12) $$2\alpha\chi(D) = f_C(D, D-K) + 2\alpha\chi(X) + y^2 - 2ay \qquad \text{où } y = D \cdot C.$$

Or on a $y^2 - 2ay \geqq -a^2$ pour tout y réel, donc $2\alpha\chi(D)$ est minoré par le premier membre de (3. 11). Or ce dernier ne change pas si on ajoute à D un multiple de C. Choisissons l'entier x tel que $D' = D + xC$ satisfasse

$$g - 1 - \alpha \leqq D' \cdot C \leqq g - 1$$

ce qui s'écrit aussi $g - 1 - \alpha \leqq \alpha x + y \leqq g - 1$, de sorte qu'un tel x existe toujours. On peut alors appliquer le théorème 3. 2, qui nous donne $\chi(D') \leqq 0$, i. e. $2\alpha\chi(D + xC) \leqq 0$. Comme le premier membre est minoré par le premier membre de (3. 11) d'après ce qui précède, l'inégalité (3. 11) s'ensuit. En y faisant $D = 0$, on trouve, compte tenu de (3. 5)

$$2\alpha\chi(X) \leqq (g - 1 - \alpha/2)^2. \tag{3. 13}$$

Remarques. Le corollaire 1 devient faux si on ne fait pas l'hypothèse que $K/2$ est encore une classe de diviseurs. En effet, toutes les hypothèses sauf cette dernière sont vérifiées si X est un surface non singulière *rationnelle*. Or, à partir d'une telle surface, on construit facilement une surface birationnellement équivalente par éclatements successifs, dont l'index τ soit < 0 (contrairement à (3. 7 ter)). En effet, on vérifie aisément que lorsqu'on fait éclater un point dans une surface non singulière projective, l'index diminue d'une unité. (Cette remarque, ainsi que l'interprétation de l'inégalité (3. 7) à l'aide de l'index, m'a été signalée par J. P. Serre).

La disparité des énoncés qu'on déduit du théorème (3. 2) est due au fait qu'il n'est pas relatif à un élément arbitraire de l'espace vectoriel E de Néron-Sévéri introduit plus haut, mais à un élément du „lattice" provenant des diviseurs sur X. On notera d'ailleurs que dans le cas particulier où X est le produit des deux courbes C et C', le théorème 3. 2 ne contient rien de plus que l'inégalité de A. Weil.

Bibliographie.

[1] *G. Bronowski*, Curves whose grade is not positive in the theory of the base, J. London Math. Soc. **13** (1958), 86.

[2] *W. V. D. Hodge*, Note on the theory of the base for curves on an algebraic surface, J. London Math. Soc. **12** (1937), 58.

[3] *S. Lang-J. P. Serre*, Sur les revêtements non ramifiés des variétés algébriques, Amer. J. Math., **79** (1957), 319.

[4] *A. Mattuck-J. Tate*, On the inequality of Castelnuovo-Severi, Hamb. Abh. **22** (1958), 295.

[5] *A. Néron*, Problèmes arithmétiques géométriques rattachés à la notion de rang d'une courbe dans un corps, Bulletin Soc. Math. France **80** (1952), 101.

[6] *B. Segre*, Intorno ad un teorema di Hodge sulla teoria della base per le curve di una superficie algebrica, Annali di Mat. **16** (1937), 167.

[7] *A. Weil*, Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent, Actualités Scient. et Ind. 1041, Paris, Hermann.

[8] *A. Weil*, Sur les critères d'équivalence en Géométrie Algébrique, Math. Annalen **128** (1954), 95.

Eingegangen am 24. März 1958.