
STRUCTURE À L'INFINI DES $M_{g,\nu}$

A. GROTHENDIECK

Structure à l'infini des $M_{g,\nu}$
1981

La "Longue Marche" à Travers la Théorie de Galois

Ce texte a été déchiffré et transcrit par Mateo Carmona

<https://agrothendieck.github.io/>

SOMMAIRE

1. Courbes standard	4
-------------------------------	---

§ I. — COURBES STANDARD

Soit k un corps algébriquement clos. Une “courbe standard” sur k est un schéma X sur k satisfaisant les conditions suivantes :

- a) X quasi-projectif, toute composante irréductible est de dim 1
- b) Tout point de X est soit lisse, soit un “point quadratique” (ordinaire) - i.e. isom (loc. ét) à la courbe $\text{Spec}(k[X, Y]/XY)$ au point 0.

Il est connu qu'on peut trouver \widehat{X} de X , telle que X soit un schéma propre, \widehat{X} s'identifie à un ouvert dense de \widehat{X} , et que \widehat{X} soit lisse sur les points de $\widehat{X} \setminus X = I$. Alors \widehat{X} est une courbe projective, I est une partie finie de $\widehat{X}(k)$ contenant un ouvert des points de lissité de \widehat{X} . L'ensemble des points singuliers de X s'identifie à I .

La donnée de X équivaut à celle des (\widehat{X}, I) , où \widehat{X} est un schéma projectif, dont toute composante irréductible est de dim 1, et dont l'ensemble singulier est formé des points ordinaires - et I est un sous-schéma fini étale de \widehat{X}^{lisse} , ou ce qui revient au même, une partie finie de $\widehat{X}^{lisse}(k)$.

Soit

Ainsi, à la courbe standard X nous avons associé les systèmes de données suivantes :

[]

Inversement, [] on construit une courbe standard X en passant au quotient dans $\widetilde{A}_k Y \setminus I_k$ par l'involution σ - i.e. X est universel [] pour la donnée p :

[]

soumise à $(pi)\sigma = pi$.

LA LONGUE MARCHE À TRAVERS LA THÉORIE DE GALOIS

Ainsi la catégorie des courbes standard sur k [] apparaît comme équivalente à celle des systèmes a) b) c) ci-dessus. (pour les iso)...

N.B. On récupère \widehat{X} comme quotient de Y par σ .

Généralisation sur une base quelconque.

Une *courbe standard* sur S (multiplicité schématique, disons) [] défini constructivement en termes d'un système a), b), c) comme ci-dessus, i.e.

[]

On construit alors $\widehat{X} = Y/\sigma$, contenant $A = \widetilde{A}/\sigma$ et I comme sous-schémas fermés finis étales sur S , et [] $X = \widehat{X} \setminus I$. On peut montrer que le foncteur

$$(Y, \widetilde{A}, \widehat{I}, \sigma_{\widetilde{A}}) \mapsto X$$

des systèmes (5) (pour les iso) vers les schémas relatifs [], est *pleinement fidèle* ⁽¹⁾.

N.B. []

[]

(par abus de langage, puisque c'est non seulement le schéma relatif Y , mais Y avec la structure supplémentaire $\widetilde{A}, I, \sigma_{\widetilde{A}}$...).

2. Graphe associé à une courbe standard

Revenons au cas d'un corps de base k algébriquement clos, pour commencer. Soit X une courbe standard, d'où $Y, I, \widetilde{A}, \sigma_{\widetilde{A}}$.

Posons

$$(7) \quad S = \pi_0(Y) \simeq [] \text{ des corps irréductibles de } X$$

On a alors le diagramme d'application canoniquement entre ensembles finis

$$(8) \quad []$$

où q est de degré 2 et définit l'involution $\sigma_{\widetilde{A}}$. Les applications σ et p sont induites par les [] en passant aux π_0 .

¹faux tel quel

A. GROTHENDIECK

Le système $(\tilde{A} \xrightarrow{\sigma} S, \sigma_{\tilde{A}})$ où $[\]$, peut être considéré comme définissant un *graphe*, dans S est l'un des sommets, et \tilde{A} l'un des $[\]$ l'application σ étant l'application "origine d'un $[\]$ ". Ce graphe ne dépend que de \widehat{X} , pas de X i.e. des choix de $I \subset \widehat{X}(k)$. C'est $[\]$ compte de ce choix que l'on considère, $[\]$ plus de la structure de graphe, le donnée supplémentaire

$$(9) \quad I \longrightarrow S$$

Le graphe indique comment les composantes irréductibles de X (figurés par les sommets) se récupèrent deux à deux - les points d'intersections, i.e. les points singuliers ("doubles" $[\]$) de X , correspondant aux arêtes. Si une composante irréductible X_α correspond au sommet α des graphes, alors les $[\]$ fermés en α correspondent biunivoquement aux points doubles de X_α - donc $[\] X_\alpha$ sont lisses $[\]$ l'extrémité.

Il est clair que tout graphe fini peut être obtenue (  iso près) par une \widehat{X} convenable - et même avec des composantes X_α de genre g_α donné (i.e. des \tilde{X}_α de genre $g_\alpha \dots$). De plus, $[\] I \longrightarrow S$ (I $[\]$ fini), cela peut être réalisé par un $I \subset \widehat{X}^{lisse}$, i.e. par une courbe standard S .

La *maquette* d'une courbe standard X consiste, pour définition, en les donnees suivantes $[\]$

Une structure formée d'une graphe fini $G = (S, \tilde{A}, \sigma)$, d'une ensemble fini I au dessus de l'une des sommets de G , et d'une application "genre": $S \xrightarrow{g} \mathbf{N}$, $[\]$ appelé ici une "maquette".

Proposition. — *Considérons la maquette d'une courbe standard X*

a) Soient $\alpha, \beta \in S$, alors α, β appartiennent à la même composante connexe de graphe G , si et seule si X_α et X_β appartiennent à la même composante connexe de X . Donc on a une bijection canonique

$$(11) \quad \pi_0(G_X) \simeq \pi_0(X),$$

en particulier X est connexe si et seule si G_X est connexe.

b) Supposons X connexe i.e. \widehat{X} connexe, i.e. $[\]$ on a alors $[\]$ i.e. $[\]$ où $[\]$

.

3. Courbes “stables” et MD-graphes

Une courbe standard (sur k algébriquement clos) est “stable”, si elle satisfait à l’un des conditions équivalentes suivantes

- a) $\text{Aut } X$ est fini
- b) Pour tout α , $(Y_\alpha, I_\alpha \cup \tilde{A}_\alpha)$ est anabélien i.e. $2g_\alpha + \hat{\nu}_\alpha \geq 3$ i.e. $2g_\alpha - 2 + \hat{\nu}_\alpha \geq 1$, i.e.
 - 1) Si $g_\alpha = 1$, on a $\hat{\nu}_\alpha \geq 1$
 - 2) Si $g_\alpha = 0$, on a $\hat{\nu}_\alpha \geq 3$
- c) Tout champ de vecteurs sur Y nul sur $I \cup \tilde{A}$ est nul.
- d) $\underline{\text{Aut}}_{(Y, \tilde{A}_k, I)}$ est un schéma en groupes fini étale sur k . On voit que cette condition (sous la forme b)) ne dépend que de la *maquette* de la courbe. On dit que X est une *MD-courbe* (MD, initiale de “Mumford-Deligne” ou de “modulaire”) si elle est stable, et 0-connexe (i.e. connexe non vide).

Les maquettes de telles courbes sont les maquettes 0-connexes et stables (i.e. dont les sommets de guère 1 sont de poids total ≥ 1 , et les sommets de guère 0 sont de poids total ≥ 3), on les appellera les MD-graphes.

NB. Une maquette est une MD-graphe si et seule si

- a) elle est 0-connexe (i.e. le graphe G est connexe $\neq \emptyset$)
- b) elle n’est pas réduit à un seul sommet de guère 1, de poids total 0 []
- c) les sommets []

Proposition. — Si $(G = (S, \tilde{A}, \sigma), I, \underline{g} : S \longrightarrow \mathbf{N})$ est une MD-graphe, son type (g, ν) est anabélien, i.e. $2g + \nu \geq 3$.

Si on avait $g = 1, \nu = 0$, alors la relation

$$g = 1 = \sum g_\alpha + h_1$$

A. GROTHENDIECK

montre que ou bien tous les g_α sont nuls et h_1 [], ou bien tous les g_α sauf une g_{α_0} sont nuls, []

[]

Soit G une maquette. On dit qu'une courbe standard sur un corps algébriquement clos est *de type G* , si sa maquette est isomorphe à G , on dit qu'elle est *G -épinglée* si on se donne un isomorphisme entre sa maquette et G (c'est donc une structure []).

Soit $(\widehat{X}, \underline{I})$ une courbe standard sur une base S quelconque, on dit qu'elle est de type G si ses fibres géométriques sont de type G . Alors les maquettes des fibres géométriques de $(\widehat{X}, \underline{I})$ forment les fibres d'une schéma en maquettes (ou un MD-graphe) sur S ($\underline{S}, \underline{\tilde{A}}, \sigma_{\underline{\tilde{A}}}, \underline{I}, \underline{\tilde{A}} \longrightarrow \underline{S}, \underline{I} \longrightarrow \underline{S}, \underline{S} \xrightarrow{g} \mathbf{N}_S$) (système de revêtements finis étales de S et de morphismes entre eux-ci), localement isomorphe à la maquette G donnée. On appelle *G -épinglage* entre $(\widehat{X}, \underline{I})$ tout isomorphisme entre G_S et $\underline{G}(\widehat{X}, \underline{I})$. Si

$$(18) \quad \Gamma = \text{Aut } G$$

(groupe fini), les G -épinglages de $(\widehat{X}, \underline{I})$ s'identifient aux sections d'une certain Γ_S -torseur, appelé *torseur de G -épinglages* de $(\widehat{X}, \underline{I})$.

Considérons, sur une base S fixée, le catégorie ([]) des courbes standard G -épinglées. Pour tout $\alpha \in S$

N.B. Si $\text{card } J = \nu$, alors

[] Il en est donc de même dans $M_{g,J}$, donc ainsi de M_G (pour G semi-stable) et de $M_{[G]} = (M_G, \Gamma)$.

4. La théorie de Mumford-Deligne

Soient S une multiplicité schématique, X un schéma relatif sur S , propre sur S , \underline{I} un sous-schéma fermé de X . On dit que (X, \underline{I}) est une MD-courbe relative sur S , si X, \underline{I} sont plats de présentation finie sur S , et si pour tout point géométrique de S , la fibre $(X_{\bar{s}}, \underline{I}_{\bar{s}})$ est une MD-courbe géométrique sur $k(s)$ i.e. $X_{\bar{s}}$ est 0-connexe, de dimension 1, [] c'est une fonction localement constant sur S .

Fixons nous une type numérique (g, ν) *anabélien* ($2g + \nu \geq 1$), et considérons, pour S variable, le groupoïde fibré

$$(24) \quad S \mapsto \widehat{M}_{g,\nu}(S) = \text{MD-courbes relatives sur } S, \text{ de type numérique égal à } (g, \nu)$$

On a alors le vraiment [] théorème suivant :

Théorème de Mumford-Deligne (²). — Le groupoïde fibré $S \mapsto \widehat{M}_{g,\nu}/S$ sur Sch (plus généralement, sur les multiplicités schématiques...) est représentable pour une multiplicité schématique $\widehat{M}_{g,\nu}$, qui est lisse et propre sur $\text{Spec } \mathbf{Z}$, D'autre part $M_{g,\nu}$ est un ouvert de Zariski de $\widehat{M}_{g,\nu}$, schématiquement dense fibre par fibre.

On en déduit aisément p. ex. la connexité des fibres géométriques []. Nous allons revenir là dessus maintenant.

5. Spécialisation des MD-graphes

Soit

6. Morphismes de [] de graphes et de maquettes
7. Étude des [] de $\dim \leq 2$ [] détermination des graphes correspondantes
8. Structure []
9. Structure groupoïdale des multiplicités modulaires de Teichmüller variables ([] MDT-structure) : cas [],
10. Structures MDT analytiques : []
11. Digression : [] Structure à l'infini des groupoïdes fondamentaux
12. Digression (suite) : topos canoniques associés à une [] et leur dévisages en "topos élémentaires"
13. Digression sur stratification "locales" []

Une *stratification globale*

²On suppose $2g + \nu \geq 3$ (cas anabélien)