Lettre de A. Grothendieck à J. Tate ([1])

Pise, Mai 1966

Cher John,

J'ai réfléchi aux groupes formels et à la cohomologie de De Rham, et suis arrivé à un projet de théorie, ou plutôt de début de théorie, que j'ai envie de t'exposer, pour me clarifier les idées.

Chapitre 1. — La notion de cristal

Commentaire terminologique : Un cristal possède deux propriétés caractéristiques : la *rigidité*, et la faculté de *croître*, dans un voisinage approprié. Il y a des cristaux de toute espèce de substance: des cristaux de soude, de souffre, de modules, d'anneaux, de schémas relatifs etc.

1.0. — Soit S un préschéma, au dessus d'un autre R; dans le cas qui nous intéressera le plus, on aura $R = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$. Soit C la catégorie des R-préschémas T sous S, (i.e. munis d'un R-morphisme $S \longrightarrow T$,) tels que $S \longrightarrow T$ soit une immersion fermée définie par un idéal localement nilpotent. On a le foncteur "oubli" de C dans Sch, et la catégorie fibrée des Modules quasi-cohérents sur des préschémas variables induit donc une catégorie fibrée sur C, associant à tout T la catégorie des Modules quasi-cohérents sur T.

Définition (**1.1**). — *On appelle cristal de modules (sous-entendu: quasi-cohérents) sur S, relativement à R, une section cartésienne de la catégorie fibrée précédente au dessus de C. Plus généralement, pour toute catégorie fibrée F sur* $\mathrm{Sch}_{/R}$, *on définit la*

[1] Ce texte a été transcrit par Mateo Carmona

notion de "F-cristal" sur S, ou "cristal en objets de F", de la façon correspondante. Ceci donne un sens aux expressions: cristal en algèbres, en algèbres commutatives, en préschémas relatifs etc, sur S relativement à R. Quand $R = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$, on parlera de "cristal absolu" sur S, de l'espèce considérée.

1.2. — Les F-cristaux sur S forment une catégorie, qui dépend fonctoriellement de F. Ceci permet, en particulier, de définir sur la catégorie des cristaux de modules sur S les opérations tensorielles habituelles: produit tensoriel de deux cristaux de modules etc, satisfaisant aux propriétés habituelles.

1.3. — Regardons de même ce qui se passe quand on fixe F et fait varier R, S. Tout d'abord, si $R \longrightarrow R' \longrightarrow R$, alors tout cristal sur S relativement à R en définit un relativement à R', par simple restriction. En particulier, un cristal absolu définit un cristal relatif, pour tout préschéma de base R de S.

Fixons maintenant R, S, et soit $S' \longrightarrow S$ un morphisme. On définit alors de façon naturelle un foncteur "image inverse" allant des cristaux de type F sur S vers les cristaux de type F sur S vers les cristaux de même type sur S' (tout relatif à R). Pour s'en assurer, il suffit de définit un foncteur $C' \longrightarrow C$ (ou C' est défini en termes de S' comme C en termes de S), compatible avec les foncteurs "oubli". Or si $S' \longrightarrow T'$ est un objet de C', il y a une construction évidente de somme amalgamée dans la catégorie des préschémas, qui donne un $T = S \amalg_{S'} T'$ et un morphisme $S \longrightarrow T$, qui fait de T un objet de C, ce qui définit le foncteur cherché.

On peut donc dire que pour un S variable sur R, les cristaux de type F sur S forment une *catégorie fibrée* sur $\mathrm{Sch}_{/R}$, grâce à la notion d'image inverse précédente.

Les deux variantes (en R, et en S) sont compatibles dans un sens évident, et peuvent être régardées comme provenant d'une variance en (R, S) directement.

1.4. — On a un foncteur naturel et évident qui va des cristaux de modules (disons) sur S (rel à R) dans des Modules quasi-cohérents sur S: c'est le foncteur "valeurs en S". On fera attention que ce foncteur n'est en général pas même fidèle (cf exemple **1.5.** plus bas). Il est donc un peu dangereux de vouloir considérer un cristal de modules sur S comme étant un Module quasi-coherent M sur S, *muni* d'une structure supplémentaire, sa "structure cristalline". Dans certains cas cependant (cf **1.8.**), le foncteur cristaux de modules $\rightsquigarrow$ Modules est fidèle et le point de vue précédent devient plus raisonnable.

1.5. Exemple 1: relations avec les vecteurs de Witt. — Supposons que S soit le spectre d'un corps *parfait* k, et $R = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$. Soit W l'anneau de Cohen de corps résiduel k: si $\mathrm{car} k > 0$, c'est l'anneau des vecteurs de Witt défini par k, si $\mathrm{car} k = 0$, c'est k lui-même; dans ce dernier cas, supposons k *algébrique* sur $\mathbf{Q}$. Alors il est bien connu que la catégorie C de **1.0.** est équivalente à celle des W-algèbres locales, annulées par une puissance de l'idéal maximal de W, à extension résiduelle triviale. Écrivant $W = \varprojlim W_n$ comme à l'accoutumé, dans le cas $p > 0$, on trouve que la donnée d'un cristal de modules (absolu) sur k équivaut à celle d'un système projectif (M_n) "p-adique" de modules M_n sur les W_n ; donc les cristaux de modules de présentation finie sur k forment une catégorie équivalent à celle des modules de type fini sur W. Si $p = 0$, alors la catégorie des cristaux de modules sur k est équivalente à celle des vectoriels sur $k = W$. Ces descriptions sont compatibles avec les notions de changement de base pour k variable. Elles se formulent évidemment pour toute autre espèce de cristaux, défini par une catégorie fibrée F.

Dans le cas envisagé, le foncteur "valeur en S", sur la catégorie des cristaux de présentation finie sur k, s'identifie au foncteur $\otimes_W k$ sur la catégorie des modules de type fini sur W, foncteur qui (si $p > 0$) n'est pas fidèle.

1.6. Exemple 2. S étale sur R. — Si $S = R$, la catégorie C admet R lui-même comme objet final, donc le foncteur "valeur en R" est une équivalence de la catégorie des cristaux sur R, de type F donné, avec la catégorie F_R. En particulier, un cristal de modules sur $\mathrm{Spec}\,\mathbf{Z}$ est essentiellement la même chose qu'un $\mathbf{Z}$-module.

De façon un peu plus général, si S est étale sur R, alors S est un objet final de C, et les cristaux de modules (disons) sur S, relativement à R, s'identifient aux Modules quasi-cohérents sur S.

1.7. Exemple 3 : S un sous-préschéma de R. — Comme la notion de cristal relatif sur S ne change pas si on remplace R par un ouvert par lequel se factorise S, on peut supposer S fermé dans R, défini par un idéal quasi-cohérent J. Soit $S_n = V(J^{n+1})$ le n-ème voisinage infinitésimal de R dans S. Alors la famille des objets S_n de C est finale dans C, d'où on conclut facilement qu'un cristal de type F sur S s'identifie à une suite $(M_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'objets des F_{S_n} qui se recollent. En particulier, si R est localement noethérien, un cristal de modules sur S relativement à R, de présentation finie, s'identifie à un Module cohérent sur le complété formel de R le long de S.

Cet exemple contient le cas de car $p > 0$ de l'exemple 1, si on note qu'à priori, grâce à Cohen, un cristal absolu sur k, c'est pareil qu'un cristal relativement à W.

On peut aussi donner un énoncé commun aux exemples 2 et 3, en partant du cas où on se donne un $S \longrightarrow R$ non *ramifié*, ce qui permet en effet de construire encore des "voisinages infinitésimaux" S_n.

1.8. Relation avec la notion de stratification. — Les données R, S, F étant comme d'habitude, considérons pour chaque entier $n \geqslant 0$ le voisinage infinitésimal Δ_n de la diagonale de $S \times_R S$, qui s'envoie dans S par les deux projections pr_1 et pr_2. Si E est un objet de F_S, une *n-connexion* sur E (relativement à R) est la donnée d'un isomorphisme $pr_1^*(E) \simeq pr_2^*(E)$ qui induit l'identité sur la diagonale. Une ∞-*connexion* ou *pseudo-stratification* de E, est la donnée pour tout n d'une n-connexion, de telle façon que ces n-connexions se recollent. Enfin, une *stratification* sur E est la donnée d'une pseudo-stratification qui satisfait aux conditions formelles d'une donnée de descente, quand on fait intervenir les voisinages infinitésimaux de tous ordres de la diagonale de $S \times_R S \times_R S$. Ces notions donnent lieu à des sorties analogues à ceux de **1.2.** et **1.3**. Notons que lorsque S est "formellement non ramifié sur R" i.e. $\underline{\Omega}^1_{S/R} = 0$, alors toutes ces notions deviennent triviales: un objet E admet alors toujours exactement une connexion de tout ordre, donc une seule pseudo-stratification, et celle-ci est une stratification: donc la catégorie des objets de F_S *munis* d'une stratification relativement à R est alors équivalente, par le foncteur "valeur en S", à la catégorie F_R elle même. (Dans tous les cas, le foncteur "valeur en S" est fidèle).

Ceci défini, on voit que pour tout cristal M sur S de type F (relativement à R), sa valeur $M(S) = M$ est un objet de F_S muni d'une *stratification canonique* relativement à R, d'où un foncteur: cristaux relatifs de type $F \rightsquigarrow$ objets de F munis d'une stratification. La remarque de **1.4.** montre d'ailleurs que ce foncteur n'est pas toujours fidèle. Il y a cependant des cas intéressants où ce foncteur est une *équivalence de catégories*: il en est en tous cas ainsi si $S \longrightarrow R$ est *"formellement lisse"*, par exemple si c'est un morphisme lisse, ou si S et R sont des spectres de corps k_0, k, avec k une extension *séparable* de k_0. (Quand d'ailleurs $S \longrightarrow R$ est même formellement étale, alors les deux catégories: celle des cristaux et celle des objets à stratification, deviennent équivalentes, par le foncteur "valeur en S", à F_S lui-même, ce qui nous redonne l'exemple à la noix de **1.5** ou k est de car. nulle). Sauf erreur, on a encore une équivalence de catégories si $S \longrightarrow R$ est *plat et localement de présentation finie*, (du moins si R localement noétherien, et se bornant aux Modules cohérents) mais je n'ai pas écrit le démonstration.

1.9. Une digression sur la notion de stratification en caractéristique nulle. — Quand S est lisse sur R (en fait, il suffit que S soit différentiellement lisse sur R, i.e. le morphisme diagonal $S \longrightarrow S \times_R S$ une immersion régulière), et si R est de caractéristique nulle, alors une stratification d'un Module M sur S (relativement à R) est connue quand on connaît la 1-connexion qu'elle définit, et on peut se donner celle-ci arbitrairement, soumise à la seule condition que le "tenseur courbure", qui est une certaine section de $\underline{\Omega}^2_{S/R} \otimes \mathrm{End}(M)$, soit nul. (Cela peut aussi s'exprimer en disant qu'on fait opérer le faisceau $\underline{\mathrm{Der}}_{S/R}$ des dérivations relatives de S sur R, sur M, de façon à satisfaire aux relations habituelles, y compris celle de transformer crochet en crochet). J'ignore dans quelle mesure l'hypothèse de lissité est nécessaire pour cet énoncé, ou si (dans le cas lisse disons) on peut formuler un énoncé analogue pour toute catégorie fibrée F sur $\mathrm{Sch}_{/R}$. Mais bien entendu, l'hypothèse de caractéristique nulle faite sur R est tout à fait essentielle. Si R est de caractéristique $p > 0$, l'énoncé qui remplace le précédent (et qui sauf erreur est dû à Cartier) est que dans ce cas, la donnée d'une "connexion sans torsion" sur M [2] équivaut à une "donnée de descente" sur M relativement à frobenius $S \longrightarrow S^{(p/R)}$. Il y a loin de là à une stratification !

1.10. La notion de p-cristal et ses variantes. — Nous supposons maintenant que S est de caractéristique $p > 0$, et $R = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$ (ou $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}_p)$, spectre des entiers p-adiques, cela reviendrait au même). Si M est un cristal de modules sur S, de présentation finie, alors en vertu de **1.5.**, pour tout $s \in S$, si s' est le spectre d'une clôture parfaite de $k(s)$, l'image inverse $M(s')$ de M en s' peut être interprétée comme un module de type fini sur l'anneau des vecteurs de Witt $W(k(s'))$. Ainsi, la notion de cristal de modules sur S (au sens absolu) semble convenable pour formaliser la notion de *"famille algébrique" de modules sur les anneaux de vecteurs de Witt aux différents points parfaits au dessus de S*. Bien entendu, la notion de cristal

[2] "compatible avec puissances p-émes"

est plus fine que ça encore, et doit donner, j'espère, la bonne notion de "famille" lorsque, disons, S est le spectre d'un corps de fonctions (donc pas nécessairement parfait). Je vais maintenant introduire une structure supplémentaire, qui devrait permettre de formuler, de même, la notion de "famille algébrique de modules de Dieudonné", paramétrée par S,

Considérons le morphisme "puissance p-ème"

$$S \xrightarrow{\mathrm{frob}_S} S,$$

il permet d'associer, à tout cristal (absolu) sur S, d'espèce quelconque, un cristal image inverse:

$$M^{(p)} = \mathrm{frob}_S(M).$$

On appelle *p-crsital* sur S un cristal M sur S, muni d'un morphisme de cristaux

$$M^{(p)} \longrightarrow M.$$

Évidemment, les p-cristaux sur S d'espèce F donnée forment encore une catégorie, dépendant fonctoriellement de F (pour les foncteurs *covariants* cartésiens de catégories fibrées), ce qui permet par exemple, pour les p-cristaux de modules sur S, d'introduire toutes les opérations tensorielles habituelles covariantes (produits tensoriels, puissances alternées et symétriques etc). Pour définir le *dual* d'un p-cristal de modules, il y a lieu d'introduire une notion duale de celle de p-cristal d'espèce F, c'est celle de p^{-1}*-cristal* d'espèce F : c'est un cristal d'espèce F, avec un morphisme de cristaux en sens inverse:

$$V : M \longrightarrow M^{(p)}.$$

Ainsi un contrafoncteur cartésien entre catégories fibrées sur Sch transforme p-cristaux en p^{-1}-cristaux, et inversement. Les p^{-1}-cristaux de modules se multiplient tensoriellement entre eux comme les p-cristaux de modules.

Pour obtenir une notion "autoduale", il y a lieu d'introduire la notion de *bicristal de poids 1* sur S, qu'on pourrait aussi appeler un *cristal de Dieudonné* sur S, lorsque F est fibré en catégories additives: c'est un cristal muni à la fois d'une p-structure et d'une p^{-1}-structure, satisfaisant aux relations

$$FV = p\,\mathrm{Id}_M, \quad VF = \mathrm{Id}_{M^{(p)}}.$$

Cette notion semble tout à fait adéquate à l'étude des groupes formels, ou ce qui revient moralement au même, à l'étude de la cohomologie de De Rham en dimension 1. En dimension supérieure i, il y a lieu d'introduire la notion de *bicristal de poids* i, qui est un cristal muni de F et V satisfaisant aux relations

$$FV = p^i \operatorname{Id}_M, \quad VF = p^i \operatorname{Id}_{M^{(p)}}.$$

Par exemple, on définit le *bicristal de Tate de poids* $2i$, qui est défini par le cristal de modules unité (associant à tout T sous S le module $\underline{O}_T$ lui-même), et les morphismes de cristaux

$$F = p^i \operatorname{Id}_{T^i}, \quad V = p^i \operatorname{Id}_{T^i}.$$

Ainsi le bicristal de Tate de poids $2i$ est la puissance tensorielle i-ème du bicristal de Tate de poids 1. (**N.B.** les bicristaux de poids quelconques se multiplient tensoriellement, de façon que les poids s'ajoutent).

1.11. — Si on veut "rendre inversible" le bicristal de Tate T^1, on est obligé, qu'on le veuille ou non, de passer à une catégorie de fractions de la catégorie des cristaux de modules sur S, (qui entre parenthèses est une catégorie $\mathbf{Z}_p$-linéaire, (i.e. les Hom sont des $\mathbf{Z}_p$-modules...), tout comme les catégories de p-cristaux etc qu'on en déduit). Il revient donc au même de passer à une catégorie de fractions, en déclarant qu'on veut rendre notre catégorie abélienne $\mathbf{Q}$-linéaire, ou en déclarant qu'on la veut rendre $\mathbf{Q}$-linéaire : il faut faire le quotient par la sous-catégorie abélienne épaisse formée des objets de torsion, qui sont aussi des objets de p-torsion [3]. On trouve la catégorie des *"cristaux de modules à isogénie près"*, ou *isocristaux*, sur S. Utilisant cette nouvelle notion, on définit comme ci-dessus la notion de p-isocristal, comme étant la donnée d'un isocristal M muni d'un homomorphisme $F : M^{(p)} \longrightarrow M$. La notion de bi-isocristal de poids i, qui serait calquée de celle de bicristal de poids i, n'est pas très raisonnable alors, car V doit être alors donné en termes de F comme $p^i F^{-1}$. Il y a lieu plutôt d'appeler *bi-isocristal* (sans précision de poids) un p-isocristal pour lequel F est un *isomorphisme*, et de ne pas choisir entre les différents $p^i F^{-1}$ possibles; il vaut mieux également ne pas parler ici de p^{-1}-isocristal, la notion intéressante étant celle de bi-isocristal, qui est manifeste-

[3] et cela revient simplement à garder les mêmes objets, et à prendre comme nouveaux Hom les $Hom \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$.

ment *autoduale* quand on se restreint aux objets de type fini: le dual de (M,F) est $(M,{}^t F^{-1})$, où M est le iso-cristal dual de M.

On peut également, bien sûr, localiser par rapport à p en partant déjà de la catégorie des bi-isocristaux de poids i, on trouve les *bicristaux de poids i à isogénie près*, qui forment une catégorie abélienne $\mathrm{Isbicr}(S,i)$, et un foncteur exact "oubli de V"

$$\mathrm{Isbicr}(S,i) \longrightarrow \mathrm{Isbicr}(S),$$

à valeurs dans la catégorie $\mathrm{Isbicr}(S)$ des iso-bicristaux sur S. Ce foncteur est *pleinement fidèle*, de sorte que *les bi-isocristaux forment une généralisation commune des bicristaux de poids i à isogénie près*. Pour préciser ce point, désignant par $\mathrm{Bicr}(S,i)$ la catégorie des bicristaux de poids i sur S, il y a lieu d'introduire des foncteurs canoniques

$$\mathrm{Bicr}(S,i) \longrightarrow \mathrm{Bicr}(S,i+1) \longrightarrow ...,$$

donnés par $(M,F,V) \rightsquigarrow (M,F,pV)$. Quand on localise ces foncteurs par p, on trouve des foncteurs

$$\mathrm{Isbicr}(S,i) \longrightarrow \mathrm{Isbicr}(S,i+1) \longrightarrow ....$$

qui se trouvent être *pleinement fidèles* : on peut donc considérer que, pour i croissant, la notion de "bicristal de poids i, à isogéne près" constitue une généralisation de plus en plus large de celle de "cristal de Dieudonné". La notion de "bi-isocristal" est à ce titre une généralisation qui englobe toutes les précédentes, et qui de plus a la louable vertu d'être stable par produit tensoriel, *et* passage au dual. Cela semble donc une catégorie toute indiquée comme catégorie des valeurs pour un foncteur "cohomologie de De Rham" convenable, lorsqu'on se décide à travailler à isogénie près.

1.12. Exemple 1 : Cas où S est le spectre d'un corps parfait k. — Alors la donnée d'un cristal de modules de type fini sur k équivaut à la donnée d'un module de type fini M sur W, la formation du motif $M^{(p)}$ correspond à la formation

$$M^{(p)} = M \otimes_W (W, f_W),$$

où f_W est l'endomorphisme de frobenius de W, et (W,f_W) est la W-algèbre définie par f_W. Par suite un structure de p-cristal sur M revient à la donnée d'un homomorphisme de W-modules $M^{(p)} \longrightarrow M$, ou si on préfère, à la donnée d'un homomorphisme f_W-semi-linéaire

$$F_M : M \longrightarrow M.$$

Comme l'application $x \longrightarrow x \otimes 1$ de M dans $M \otimes_W (W, f_W)$ est bijective, f_W étant un automorphisme de W, on peut considérer la bijection inverse, qui est f_W^{-1}-semi-linéaire. Par suite, la donnée d'une p^{-1}-structure sur M revient à la donnée d'un homomorphisme f_W^{-1}-linéaire:

$$V_M : M \longrightarrow M.$$

la donnée d'un couple (F, V) définit sur M une structure de bi-cristal de poids i si et seulement si on a

$$FV = VF = p^i Id_M.$$

En particulier, pour $i = 1$, on retrouve la notion de *module de Dieudonné*: la catégorie des cristaux de Dieudonné sur k est canoniquement équivalente à celle des modules de Dieudonné relativement à k.

La catégorie des isocristaux de type fini sur k est équivalente à la catégorie des vectoriels de dimension finie sur le corps des fractions K de W. Donc un biisocristal (de type fini) sur k s'identifie à un tel vectoriel, muni d'un f_K-endomorphisme bijectif.

Toutes ces descriptions sont compatibles avec les opérations tesorielles, et la formation d'images inverses pour k variable.

On peut se demander, avec la description précédente des bi-isocristaux, quels sont ceux qui sont les couples (E, F), E un vectoriel sur K et F un automorphisme semi-linéaire, tels que, si on pose $V = p^i F^{-1}$, pout out $x \in E$, l'ensemble de ses transformés par les différents monômes non commutatifs en F, V soit une partie *bornée* de E: c'est une pure tautologie. Pour qu'il existe un i ayant cette propriété, il faut et il suffit que pour tout $x \in E$, l'ensemble des $F^n x$ soir borné.Bien entendu, c'est là une propriété qui est stable par changement de F en pF (correspondant à la tensorisation par le bi-isocristal de Tate de poids 2), mais non par le changement de F en $p^{-1}F$ (correspondant à la tensorisations par l'inverse T^{-1} du bi-isocristal précédent). Comme on tient beaucoup à inverser Tate, on voit qu'il n'est pas naturel, en ffet, de poser une condition de croissance sur l'ensemble des itérés de

F. De façon précise, appelant *effectis* les bi-isocristaux qui proviennent d'un objet d'un Isbicr(S, i), on voit que tout bi-isocristal est de la forme $T^{-i} \otimes_{\underline{N}}$, avec $\underline{N}$ effectif: on n'a pas ajouté plus de nouveaux objets qu'il n'était absolument nécessaire !

1.13. Exemple 2 : S lisse sur un corps parfait k. — Déterminons d'abord dans ce cas les cristaux sur S, sans plus. Wout d'abord, sans condition de lissité, on voit à l'aide de la propriété caractéristique de W que la catégorie C introduite dans 1.0. ne change pas, essentiellement, quand on remplace $R = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$ par $R = \mathrm{Spec}(W)$. D'autre part, il résulte aussitôt des définitions que la donnée d'un cristal sur S, relativement à W, revient à la donnée d'un système cohérent de cristaux sur S, relatifs aux $W_n = W/p^{n+1}W$. (**NB** On n'a pas formulé avec la généralité qui convenait l'exemple 3 de 1.7.!) Théoriquement, on est donc ramené à déterminer, pour chaque n, la catégorie des cristaux sur S relatifs à W_n, et les foncteurs restrictions entre ces catégories. D'ailleurs, il est inoffensif de se localiser sur S, par exemple de supposer au besoin S affine. Utilisant maintenant la lissité de S, on peut donc supposer que pour tout n, S se remonte en un S_n lisse sur W_n, de façon que ces choix se recollent (il suffit pour ceci S lisse et affine). Or, il résulte encore facilement des définitions, utilisant seulement que $S = S_0 \longrightarrow S_n$ est une immersion fermée définie par un Ideal nilpotent, que le foncteur restriction des cristaux sur S_n (relativement à une base quelconque - ici on prendra W_n) vers les cristaux sur S_0, est une équivalence de catégories, donc un cristal sur S relativement à W_n s'identifie à un cristal sur S_n relativement à W_n. Comme $S_n b$ est lisse sur W_n, il résulte de ce qui a été dit dans 1.8. que les cristaux en question s'identifient aux objets (de l'espace F considérée) sur S_n, *munis d'une stratification relativement à* $R_n = \mathrm{Spec}(W_n)$. Les foncteurs restrictions sur les cristaux s'expriment alors par les foncteurs restrictions correspondants pour objets stratifiés. En résumé: *un cristal M sur S s'identifie à un système cohérent (M_n) d'objets à stratification sur les différents S_n sur $R_n =$* $\mathrm{Spec}(W_n)$. Pour relier ceci à des objets qui soient plus dans la nature d'objets "définis en caractéristique nulle", supposons d'abord que l'on puisse même relever S en un schéma X *propre sur* $R = \mathrm{Spec}(W)$, hypothèse évidemment bien restrictive. On voit alors, utilisant les théorèmes de comparaison EGA III 4.5 que *dans le cas de cristaux de modules cohérents sur S, la catégorie des dits* *est canoniquement équivalente à la catégorie des Modules cohérents M sur X, munis d'une stratification relativement à $R = \mathrm{Spec}(W)$.* (**N.B.** Il se trouve donc, à posteriori, que cette dernière catégorie est essentiellement indépendante du relèvement choisi X de S). Considérant la fibre générique X_K de X sur R, qui est un schéma propre et lisse sur un corps de caractéristique nulle, on trouve donc un foncteur remarquable "restriction" ou "localisation", allant de la catégorie des cristaux de modules cohérents sur S, dans la catégorie des Modules cohérents sur X_K, stratifiés relativement à X_K. Or (oubli de **1.8.**) on voit facilement qu'un Module cohérent stratifié sur un préschéma localement de type fini sur un corps est nécessairement localement libre. De plus comme ici K est de caractéristique nulle, et X_K lisse dessus, on a signale dans **1.8.** que la notion de stratification s'explicite très simplement comme celle de "connexion intégrable". [Enfin, lorsque S donc X_K est géométriquement connexe, et que K peut se plonger dans le corps des complexes C, alors la notion de module cohérent à action intégrable sur X_K s'interprète en termes de représentations linéaires (complexes) du groupe fondamental transcendant de X_C^{an}, de façon bien connu. Si par exemple le groupe fondamental transcendant est le groupe unité, alors on conclût par descente que tout Module cohérent stratifié sur X_K est trivial, ce qui en termes de S s'énonce en disant que tout cristal de modules cohérents sur S est isogène à un cristal "croissant", i.e. à un cristal qui est l'image inverse d'un cristal sur k, (lui-même défini par un module de type fini sur W). De ceci et de la rigidité de la notion de cristal on déduit facilement, par exemple, que tout p-cristal cohérent sur S ou tout bi-cristal de poids i donné (par exemple tout cristal de Dieudonné) est isogène à un fournit de même espèce *trivial*. On voit donc là un principale d'approche transcendante pour l'étude des familles de groupes formels (par exemple) en caractéristique p...] Quand à la notion d'isocristal (de modules cohérents) sur S, on constate aussitôt que le foncteur précédent induit un foncteur *pleinement fidèle* de la catégorie de ces derniers, dans la catégorie des modules cohérents stratifiés sur X_K. Il s'impose évidemment d'en déterminer l'image essentielle, et pour commencer d'examiner si par hasard ce foncteur ne serait pas une équivalence de catégories. Cela me [4] semble un peu *trop optimiste*, mais je ne suis sûr de rien, faute d'avoir regardé. Tout ce qu'on peut dire

[4] effectivement [ ]

à priori, c'est que la condition cherchée sur un Module stratifié doit être de nature locale en les points de X qui sont maximaux dans S.

Quand on ne suppose pas S propre et remonté globalement, mais qu'on suppose seulement qu'on a remonté S formellement, en un *schéma formel* X sur R, alors il est vrai (en fait, de façon essentiellement triviale) que *la catégorie des cristaux de modules cohérents sur S est équivalente à la catégorie des Modules cohérents sur le schéma formel* X, *munis d'une stratification relativement à* $\mathrm{Spec}(W) = R$ (quand on transcrit de façon évidente toutes les définitions envisagées dans 1.8. dans le cadre formel). Si on veut encore, comme il est légitime, trouver un analogue la restriction à X_K envisagées plus haut, il faut définir X_K comme *l'espace rigide-analytique sur K défini par le schéma formel* X, et considérer sur X_K des Modules cohérents munis de *stratifications au sens rigide-analytique*, ou ce qui revient au même, de connexions intégrables en ce sens. De tels Modules sont encore nécessairement localement libres. On trouve ainsi un foncteur des cristaux de Modules cohérents sur S dans les Modules cohérents stratifiés sur X_K, induisant un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des isocristaux cohérents sur S, dans la catégorie des Modules cohérents stratifiés sur X_K. Comme tout à l'heure (et même plus, si on peut dire, car c'est vraiment ici la situation "naturelle"), il s'impose de regarder quelle est l'image essentielle. On peut également se demander si les Modules cohérents stratifiés sur un espace rigide-analytique n'admettraient pas une description simple, en termes d'un groupe plus ou moins discret jouant le rôle du groupe fondamental dans la théorie transcendante sur le corps de complexes. La description donnée des cristaux sur S, toute triviale qu'elle soit, a déjà des conséquences intéressantes pour la structure de la catégorie des cristaux de modules cohérents sur S: cette catégorie est noethérienne (si S est noethérien i.e. de type fini sur k), tout objet contient donc un plus grand sous-objet de torsion, de plus objets sans torsion correspondent dans la description ci-dessus aux Modules stratifiés sans torsion sur X, lesquels sont alors automatiquement localement libres. Il est bien probable que des résultats analogues doivent être vrais sans hypothèse du genre lissité sur S.

1.14. — Il faut encore expliciter, dans la description générale précédente, le foncteur [], pour pouvoir décrire de façon générale, si en plus de la donnée de S sur k, on a un S' lisse sur k' parfait, et des automorphismes $S' \longrightarrow S$ et

$\mathrm{Spec}(k') \longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$ donnant lieu à un carré commutatif, et si enfin on peut relever S' formellement en X', et $S' \longrightarrow S$ en $X' \longrightarrow X$, donnant un carré commutatif avec $\mathrm{Spec}(W') \longrightarrow \mathrm{Spec}(W)$, alors la notion d'image inverse de cristaux de modules cohérents, de S à S', s'explicite en termes d'image inverse de Modules cohérents stratifiés, de X à X'. Lorsque $k = k'$, $S = S'$, et que les morphismes envisagés sont les puissances p-èmes, on est donc conduit à chercher à relever ce morphisme à X de façon compatible avec le morphisme $\mathrm{Spec}(W) \longrightarrow \mathrm{Spec}(W)$ déduit de f_W, ou ce qui revient au même, de relever le morphisme canonique $S \longrightarrow S^{(p/k)}$ en un morphisme de R-schémas formels $X \longrightarrow X \times_R (R, f_R)$. C'est en tous cas toujours possible si S est affine, cas auquel on peut se ramener. Ayant donc ainsi un morphisme

$$f_X : X \longrightarrow X,$$

compatible avec f_R sur $R = \mathrm{Spec}(W)$, et induisant f_S sur S, le foncteur [] s'explicite comme l'image inverse ordinaire de Modules stratifiés sur X relativement à R, resp. (dans le cas de isocristaux) de Modules stratifiés sur l'espace rigide-analytique X_K, pour le "morphisme" $X_K \longrightarrow X_K$ d'espaces rigide-analytiques (relatif à f_K sur le corps de base !) induit par f_K. Bien que f_K et par suite f_{X_K} loin d'être unique, le foncteur envisagé qu'il définit ne dépend pas, essentiellement, des choix faits.

1.15. Bicristaux et biisocristaux sur une base quelconque. — Ne supposons plus nécessairement S de caractéristique déterminé p. Pour chaque nombre premier p, soit S_p la fibre $V(p l_{\underline{O}_S})$ de S sur le point $p\underline{Z}$ de $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$. Un bicristal de poids i sur S est par définition la donnée d'un cristal de Modules M sur S, et pour chaque p d'une structure de bi-cristal de poids i sur la restriction M_p de M à S_p, définie par la donnée de F_p, V_p. On définit de même la notion de bi-isocristal sur S, étant entendu qu'un isocristal est un objet de la catégorie des isocristaux sur S (comme de juste), définie à partir de la catégorie des cristaux de modules en "localisant" par rapport à des entiers $n > 0$ arbitraires, i.e. en tensorisant les Hom sur Z par Q. - Lorsque S est de cararactéristique nulle, le supplément de structure impliqué par "bi" est évidemment vide, tandis que si S est de type fini sur Z et domine $\mathrm{Spec}(Z)$, alors la notion envisagée est d'une essentiellement arithmétique, les différents F_p jouant le rôle d'homomorphismes de frobenius, comme de bien entendu; dans le cas du poids 1, en particulier, on peut considérer que le cristal avec sa bi-structure supplémentaire permet de relier entre eux les groupes formels en les diverses caractéristiques auxquels il donne naissance...

1.16. Un retour en arrière. — La définition 1.1. et le sortie 1.3. sont un petit peu canulés. Au lieu de prendre dans 1.0. pour C la catégorie des R-flèches $S \longrightarrow T$ qui..., il faut prendre la catégorie des R-flèches $U \longrightarrow T$ qui..., où U est un ouvert induit non précisé de S. De plus, la définition n'est guère raisonnable alors que si la catégorie fibrée envisagée F est un "champ" pour la topologie de Zariski sur $\mathrm{Sch}_{/R}$, i.e. si on peut y recoller flèches et objets. Ceci est nécessaire en tous cas pour pouvoir dans 1.3. définir la notion d'image inverse, la définition que j'y ai donnée n'étant raisonnable que si S, S' sont affines. Dans le cas général, il faut se localiser sur S et S' pour se ramener à cette situation. Autrement on bute sur des canulars idiots de nature globale, comme le fait que sans restrictions sur $S' \longrightarrow S$, la construction envisagée de somme amalgamée fait sortir de la catégorie des préschémas... Il est probable qu'il y aura bien d'autres canulars de détail dans ces notes, mais, je pense, sans conséquence !

Il est évidemment tentant de vouloir interpréter les cristaux de modules comme faisceaux de modules sur un certain site. C'est possible, en prenant le *"site cristallogène de S sur R"*, qui est précisément le site dont la catégorie sous-jacent C est celle des R-morphismes $U \longrightarrow T$ (U ouvert de S, $U \longrightarrow T$ immersion fermée surjective définie par Ideal nilpotent sur T), la topologie est celle de Zariski: on prend comme familles couvrantes "de définition" de $(U \longrightarrow T)$ les familles définies pr des recouvrements ouverts (T_i) de T, chaque T_i muni de la structure induite, et définissant $(U_i \longrightarrow T_i)$ par $U_i = U \cap T_i$. Un faisceau d'ensembles sur ce site s'identifie à un système de faisceaux d'ensembles $F_{U \longrightarrow T}$ sur les objets buts des objets de C, avec, pour tout flèche $(U \longrightarrow T) \longrightarrow (U' \longrightarrow T')$ de C, un homomorphisme de l'image inverse de $F_{U' \longrightarrow T'}$ [] T, dans $F_{U \longrightarrow T}$ (homomorphisme qui n'est pas nécessairement un isomorphisme !) et qui sont un isomorphisme si $T \longrightarrow T'$ est une immersion ouverte. En particulier, associant à tout $(U \longrightarrow T)$ le faisceau O_T sur T, on trouve un faisceau d'anneaux O_C sur C. Ceci posé, les cristaux de modules (quasi-cohérents) sur S s'identifient aux Modules quasi-cohérents (i.e. localement conoyau d'un homomorphisme de Modules libres) sur O_C ; les cristaux "de près finie" i.e. les cristaux de Modules de présentation finie, correspondant exactement aux Modules de présentation finie sur O_C.

Quand on a un R-morphisme $S' \longrightarrow S$, je ne vois pas de morphisme naturel correspondant entre les *sites* cristallogènes correspondants à S, S'. Ce n'est pas bien gênant, car introduisant les *topos cristallogènes* $\mathrm{Topcr}_{S/R}$ et $\mathrm{Topcr}_{S'/R}$ définis par les sites en question, on définit par la méthode esquissée dans 1.3. un morphisme

$$\mathrm{Topcr}_{S'/R} \longrightarrow \mathrm{Topcr}_{S/R},$$

correspondant à la notion naturelle de "image inverse de faisceaux" au sens inverse (qui, j'avoue devrait être définie avec le plus grand soin).

1.17. — On est donc dans une situation où on peut faire marcher la machine cohomologique. Étant loin de mes bases, je n'ai pas tenté sérieusement de tirer au clair si les images directes supérieures qu'on définit ainsi, et en particulier les groupes de cohomologie du site cristallogéne, donnent ce qu'on voudrait.

Le test-clef est le suivant: *si R est le spectre d'un corps, et si S est lisse sur R, et propre sur R dans le cas de la caractéristique $p > 0$, on voudrait trouver, comme cohomologie à coéfficients dans $\underline{O}_C$ lui-même, la cohomologie de De Rham de S relativement à R.* Plus généralement, sans condition sur R, si $f : S' \longrightarrow S$ est propre et lisse, on voudrait trouver comme "valeur en S'" $\mathrm{R}^1 f_{cris*}(\underline{O_{C'}})$ (cf 1.4.) le faisceau de cohomologie de De Rham $\mathrm{R}^i f_*(\Omega^*_{S'/S})$, et on voudrait [5] que la connexion canonique à la Gauss-Manin sur ce dernier soit celle associée à la stratification canonique provenant de la structure cristalline (cf 1.8.).

L'existence d'une connexion de Gauss-Manin en cohomologie de De Rham (que j'ai vérifié pour n'importe quel morphisme lisse), et le tapis de Washnitzer-Monsky, sont en tous cas des indications assez fortes pour conduire à penser qu'il doivent exister une théorie cohomologique, en termes de cristaux, donnant de telles valeurs pour l'argument $\underline{O}_C$. Au cas où la cohomologie du site cristallogène ne donnerait pas les résultats qu'il faut, on pourrait essayer (au lieu de prendre des foncteurs dérivés dans la catégorie de *tous* les Modules sur le site annelé cristallogène) de prendre des foncteurs dérivés dans la catégorie des seuls Modules quasi-cohérents sur le site cristallogène, i.e. dans la catégorie des cristaux de modules.

5

Chapitre 2. — La cohomologie de De Rham est un cristal

2.1. — L'affirmation du titre n'est pour l'instant qu'une hypothèse ou un voeux pieux mais je suis convaincu qu'elle est essentiellement correcte. Comme je l'ai dit dans 1.17., il y a pour le moment deux indications dans cette directions

a) Le travail de Washnitzer-Monsky. Deux grosses imperfections dans leur tapis: 1° ils n'obtiennent que des invariants cohomologiques *locaux* sur leur variété lisse en caractéristique $p > 0$, via leurs relèvements; pour avoir un invariante global, ils doivent se limiter à la dimension 1. On peut penser que cela tient à leur manque de familiarité avec les machines cohomologiques. 2° leurs invariants sont des (faisceaux de) vectoriels sur le corps des fractions de W, et non sur W, i.e. ils n'obtiennent que des invariants "modulo isogénie". Il semble bien, en effet, que leur démonstration d'invariance fait intervenir de façon essentielle des dénominateurs. Il n'est pas exclu, d'après cette indication, que dans le titre du Chapitre il faille remplacer "cristal" par "isocristal" (et "est" par "définit"). Ce serait bien dommage, mais n'exclurait pas pour autant l'existence d'une bonne théorie cohomologique pour les cristaux, qui pour un morphisme propre et lisse et le "cristal unité" coïnciderait *modulo isogénie* avec ce que donne De Rham. Le est décisif reste celui indiqué dans 1.17, savoir: donnent-il un résultat positif seulement en caractéristique zéro, ou en toute caractéristique ?

b) L'existence des connexions de Gauss-Manin. J'ai vérifié pour tout morphisme lisse $f : X \longrightarrow S$ l'existence d'une connexion canonique (absolue) sur les $\mathrm{R}^i f$ au sens de De Rham relatif, ou plus correctement, sur le complexe $\mathrm{R}f_*(\Omega^\bullet_{X/S})$, considéré comme objet de la catégorie dérivée $D(O_S)$. A vrai dire, je n'ai pas vérifié pour cette connexion une condition de "nullité de la [ ]"; c'est vérifié en tous cas (par voie transcendante !) si S est lisse, sur R rduit de caractéristique nulle. [Il faut noter d'ailleurs qu'il n'y a pas d'espoir de montrer que la connexion en question provient toujours d'une stratification: c'est *faux* en caractéristique $p > 0$; la raison étant que la cohomologie de De Rham pour une variété algébrique non complète (par exemple affine) n'est plus du tout raisonnable, étant beaucoup trop grosse. Pour pouvoir espérer une stratification sur $\mathrm{R}f_*(\Omega^\bullet_{X/S})$, sans restriction de caractéristique, il faut donc supposer f *propre*.]

c) La nécessité d'une interprétation cristallographique de la cohomologie de De Rham est également suggérée par le problème que j'avais signalé dans mon papier bleu sur De Rham: si R est le spectre du corps des complexes, S lisse sur R et X lisse et propre sur S, alors la théorie transcendante de la cohomologie fournit une suite spectrale

2.2. — Je vais préciser l'affirmation du titre, en me plaçant dans l'éventualité optimiste bien sûr où on n'aurait pas besoin de s'isogéniser. Comme les cristaux de modules sur un préschéma S forment une catégorie abélienne, on peut prendre la catégorie dérivée; ces objets seront appelés simplement "complexes de cristaux". Un tel animal induit sur S, plus généralement sur tout objet-but T d'un objet $(U \longrightarrow T)$ du site cristallogène C de S, un complexe de Modules ordinaire (envisagé comme objet de la catégorie dérivée des faisceaux de Modules sur S, resp. T). Un complexe de cristaux est dit pseudo-cohérent (resp. parfait, resp. ...) si pour tout objet $(U \longrightarrow T)$ de C, le complexe induit sur T est pseudo-cohérent (resp. ...). Ceci posé, voilà la théorie qu'on voudrait: A tout morphisme lisse et propre $f : X \longrightarrow S$, serait associé un complexe de cristaux (absolu) $\mathrm{DR}(f)$ sur S, appelé cohomologie de De Rham cristalline de f. Ce complexe doit être parfait, sa formation doit être compatible avec tout changement de base sur S (l'image inverse des complexes des cristaux étant entendu, bien entendu, au sens de catégories dérivées...), et bien sûr $\mathrm{DR}(f)$ dépend fonctoriellement (de faoņ contravariant) de X sur S. Tôt ou tard, il faudra expliciter aussi une formule de Künneth $\mathrm{DR}(f \times_S g) \simeq \mathrm{DR}(f)[]\mathrm{DR}(g)$, et une formulé de dualité, qui pour f partout de dimension relative d s'exprime comme un accouplement, définissant une autodualité, $\mathrm{DR}(f) \times \mathrm{DR}(f) \longrightarrow T^d[2d]$, où T^d est le cristal de Tate de poids $2d$, et où $[2d]$ indique qu'on translate les degrés de $2d$ (attention au facteur 2 !). Enfin, on veut comme de juste un isomorphisme $\mathrm{DR}(f)(S) \simeq \mathrm{R}f_*(\Omega^\bullet_{X/S})$, fonctoriel en X, compatible avec les changements de base, avec Künneth et la dualité (déjà connus pour la cohomologie de De Rham ordinaire).

Par prudence, je me suis abstenu de dire quoi que ce soit sur le cas f non propre, dont il faudrait parler tout au moins si on voulait faire sérieusement le lien avec

Washnitzer-Monsky.

2.3. La cohomologie de De Rham comme biisocristal — A supposer qu'on ait une théorie du type envisagé dans 2.2., on trouve pour chaque entier p un homomorphisme de frobenius

$$F_p : \mathrm{DR}(f)_p^{(p)} \longrightarrow \mathrm{DR}(f)_p,$$

où l'indice p au complexe de cristaux $\mathrm{DR}(f)$ désigne la restriction à $S_p = V(p.1)$ (au sens des catégories dérivées), qui d'après les conditions de 2.2. n'est autre que $\mathrm{DR}(f_p)$, $f_p : X_p \longrightarrow S_p$ étant induit par f. Utilisant toujours la même condition de compatibilité avec le changement de base, on constate que $\mathrm{DR}(f_p)^{((p))}$ n'est autre que $\mathrm{DR}(f_p^{(p)})$, où $f_p^{(p)} : X_p^{(p/S_p)} \longrightarrow S_p$ est le morphisme structural de frobenius relatif de X_p sur S_p. Or on a le morphisme de frobenius $X_p^{(p/S)} \longrightarrow X$, qu est un S-morphisme, qui par fonctorialité de DR nous donne $\mathrm{DR}(f_p)^{((p))} \longrightarrow \mathrm{DR}(f)_p$ comme on voulait. Il faut prouver que cet homomorphisme est en fait une isogénie, donc que l'isocristal défini par $\mathrm{DR}(f)$ devient, à l'aide des F_p, un bi-isocristal. Mais utilisant la relation de dualité écrite dans 2.2. (à vrai dire, l'écriture T^p pour le cristal unité ne prend son sens que lorsque on le regarde comme muni de sa structure de bi-cristal naturelle, qui n'intervient qu'ici), on peut transposer F en un V, tel que $FV = VF = p^{2d}$, ce qui prouve notre assertion.

D'ailleurs, lorsque l'on passe du cristal de De Rham $\mathrm{DR}(f)$ à l'isocristal correspondant, donc des objets de cohomologie $\mathrm{DR}^i(f)$ aux isocristaux correspondants, il sera vrai (tout comme pour les $\mathrm{R}^i f_*$ de De Rham en caractéristique nulle) que leur formation commute à tout changement debase, de sorte que chacun des isocristaux $\mathrm{DR}^i(f)$ devient à son propre titre un bi-isocristal. Au moment de rédiger 1.10. il m'avait semblé que, sans mettre du iso dans le coup, $\mathrm{DR}^i(f)$ devrait être un bi-cristal de poids i, mais je m'étais canulé, il faudrait pour cela une polarisation de X de S qui définisse un isomorphisme (pas seulement une isogénie) de $\mathrm{DR}^i(f)$ avec $\mathrm{DR}^{2d-i} \otimes T^{-(d-i)}$, ce qui n'existe évidemment que très exceptionnellement; une fois qu'on l'a, on définit V dans DR^i en transposant F dans DR^{2d-i}.

2.4. Cas d'un schéma abélien — Il semble que ce ne soit guère que dans ce cas-là où il soit bien raisonnable de parler de bi-cristaux et non seulement de bi-iso-cristaux. De façon précise, $\mathrm{DR}^1(f)$ a dans ce cas une structure de bicristal, défini par les F_p précédents, et des V_p qui se définissent encore, par fonctorialité de DR, à l'aide de l'homomorphisme "Verschiebung" $A_p^{(p/S_p)} \longrightarrow A_p$ (défini avec la généralité qui convient dans les notes de Gabriel dans SGAD). Comme $\mathrm{DR}^1(A/S)$ est un foncteur multiplicatif en A, grâce à Kunneth postulé dans 2.2., et que l'on a $FV = VF = pId$ sur les schémas abéliens en car p, on en conclut les mêmes relations dans DR^1. Cela montre donc que $\mathrm{DR}^1(A)$ est un bicristal de poids 1, i.e. un *cristal de Dieudonné*. Lorsque S est le spectre d'un corps parfait de caractéristique $p[]0$, un tel cristal s'identifie simplement, d'après 1.12, à un module de Dieudonné sur $W = W(k)$. Bien sûr, *on doit trouver que ce module n'est autre que le module de Dieudonné du groupe formel* (ou plutôt, du groupe p-divisible) *défini par la variété abélienne A.* Débarrasser de l'hyperstructure axiomatico-conjectural de 2.2., on peut exprimer ainsi la construction obtenue du module de Dieudonné:

1° Soit A un schéma abélien sur un schéma affine S. On sait que pour tout morphisme $S \longrightarrow T$ d'immersion fermée surjective, défini par Idéal nilpotent sur T, A se prolonge en un schéma abélien B sur T. On peut regarder la cohomologie de De Rham ordinaire $\mathrm{R}^1 g_*(\Omega^\bullet_{B/T})$, où $g : B \longrightarrow T$ est le morphisme structural, et on sait que c'est un Module localement libre de rang $2g$

2° Supposons que S soit le spectre d'un corps parfait k de car $p > 0$, alors le cristal précédent s'identifie à un module libre de rang $2g$ sur $W = W(k)$. On y introduit les structures F et V, en utilisant comme ci-dessus les homomorphismes $F : A \longrightarrow A^{(p)}$ et $V : A^{(p)} \longrightarrow A$. On trouve ainsi un module de Dieudonné M, et:*Deuxième affirmation :* C'est bien celui défini par Dieudonné. En d'autres termes: si A est n'importe quel anneau local artinien de corps résiduel k, et B un prolongement de A en un schéma abélien sur Λ, alors la cohomologie de De Rham $\mathrm{H}^1_{\mathrm{DR}}(B) = \mathrm{H}^1(B, \Omega^\bullet_{B/\Lambda})$ est canoniquement et fonctoriellement isomorphe à $M \otimes_W \Lambda$, où M est le module de Dieudonné classique de A, et où on tient compte du théorème de Cohen qui munit Λ d'une structure canonique de W-algèbre (N.B. la fonctorialité de l'isomorphisme garantira automatiquement qu'il est compatible avec F et V).

2.5. — Je n'ai pas vérifié, à vrai dire, les deux affirmations, mais n'ai pas le moindre doute qu'elles sont correctes telles quelles. Cette façon de voir le module de Dieudonné permet de plus d'expliciter de façon remarquable les variations infinitésimales de structure de la variété abélienne A donnée, en caractéristique $p > 0$, en termes du module de Dieudonné: les prolongement de A en un schéma abélien B sur Λ doivent correspondre exactement aux modules quotients libres de rang g de $M \otimes_W \Lambda$ qui redonnent, modulo p, le module quotient de rang g canonique de $M \otimes_W k = \mathrm{H}^1_{\mathrm{DR}}(A)$, (correspondant à la filtration canonique de cette cohomologie). Plus généralement et plus précisément :

3° Considérons, pour tout schéma abélien A sur une base S, sur la cohomologie de De Rham $\mathrm{R}^1 f_*(\Omega^\bullet_{A/S}) = \mathrm{H}^1(f)$, la filtration canonique

$$0 \leftarrow \mathrm{R}^1 f_*(O_A) \leftarrow \mathrm{H}^1(f) \leftarrow \mathrm{R}^0 f_*(\Omega^1_{A/S}) \leftarrow 0.$$

Donc pour tout B sur T comme dans 1°, on a sur $M(T) = \mathrm{DR}^1(A/S)(T) = \mathrm{H}^1(g)$ une filtration naturelle, ne dépendant que de la classe à isomorphisme près connue de $M(S) = \mathrm{H}^1(f)$ provenant de A. Ceci dit, *troisième affirmation : on obtient ainsi une correspondance biunivoque entre classes de prolongements de A à T, et prolongements de la filtration donnée de $M(S) = M \otimes_{O_T} O_S$ en une filtration de $M(T)$.* Plus précisément encore, le foncteur $B[\,](A, \varphi)$, de la catégorie des schémas abéliens B sur T, dans la catégorie des schémas abéliens A sur S, munis d'une filtration φ de $\mathrm{DR}^1(A/S)(T)$ prolongement celle de $\mathrm{DR}^1(A/A)(S)$ (N.B. il ne s'agit que de filtrations à quotients localement libres, bien sûr) est une équivalence de catégories.

Ce énoncé est évidemment fort suggestif aussi pour des généralisations en cohomologie de De Rham de dimension supérieure, pour un morphisme lisse et projectif quelconque, tenant compte de la filtration canonique de celle ci. On voit bien en tous cas que ce dernier élément de structure n'est *pas* de nature cristalline, i.e. donnée par une filtration du cristal de De Rham postulé dans 2.2., mais est au contraire dans la nature d'un élément de structure "continu", dont la variation doit refléter fidèlement les variations de structure de motif donnant naissance au cristal envisagé. Pour arriver à préciser ce dernier point, il faudrait des fondements un peu plus fermes de la théorie des motifs, comme de celle (certainement beaucoup plus élémentaire) des cristaux et de la cohomologie de De Rham. Yne autre généralisation, (suggérée par comparaison du 3° avec Serre-Tate, disant que si S

est de caractéristique $p > 0$, alors étendre A à T, c'est pareil qu'étendre le groupe p-divisible correspondant), concerne la théorie des groupes formels, dont il sera question au Chapitre 3. Pour préparer le terrain, je vais présenter d'une façon un peu différente le cristal $\mathrm{DR}^1(A/S)$ associé à un schéma abélien, en utilisant explicitement la structure de groupe du dit.

2.6. — De façon générale, paraphrasant sur une base quelconque une vieille construction de Serre (c'est de lui que je l'ai apprise, du moins), on trouve que pour tout schéma abélien A sur une base S, il y a une extension naturelle de A par le fibré vectoriel $V(\mathrm{R}^1 f_*(O_A)) = V(t_A)$, (où A est le schéma abélien dual de A). Attention à la notation, le fibré vectoriel $V(E)$ est contravariant en E, ces sections sont les homomorphismes $E \longrightarrow O_S$! L'extension en question est universelle parmi les extensions de A par des fibrés vectoriels, est fonctorielle en A, et compatible avec changement de base. Appelons la $G(A)$. Ainsi, le faisceau de Lie de $G(A)$ est une extension

$$[]$$

qui est duale e la suite exacte envisagée dans 2.5., dont nous avons donc ici une construction indépendante en termes d'extensions de A par des groupes vectoriels. On peut en profiter pour préciser en affirmant que, pour un prolongement B de A, de S à T, le schéma en groupes $G(B/S)$ est déterminé, à isomorphisme canonique (et même unique) près, par le seule donnée de A et de $S \longrightarrow T$, indépendamment du choix particulier du prolongement B. En d'autres termes, on trouve un *cristal en schémas de groupes lisses* $G(A/S)$, et pour chaque prolongement infinitésimal B de A à un T, un isomorphisme canonique $G(A/S)(T) \simeq G(B/T)$; tout ça bien sûr fonctoriel en A et compatible avec changements de base. D'autre part, on peut préciser alors 3° en indiquant quel est le foncteur quasi-inverse de celui envisagé dans cet énoncé: l'extension de la filtration de $\mathrm{DR}^1(A/S)(S)$ en une filtration du faisceau de Lie $\mathrm{DR}^1(A/S)(T)[]$ de $G(A/S)(T)$ revient à étendre le sous-groupe vectoriel canonique de $G(A/S)(S)$ en un sous-groupe vectoriel de $G(A/S)(T)$, et l'on trouve B en passant simplement au quotient.

N.B. Je suis tombé sur la connexion canonique de $G(A/S)$ en essayant de simplifier la construction de Manin de l'application $A(S) \longrightarrow \Gamma(S, O_S)$ associée à une équation de Picard-Fuchs sur S, relativement à A. Pour ceci, il suffit de noter que localement sur S toute section de A sur S se remonte en une section de $G = G(A/S)$ sur S ! La donnée de la connexion de G permet alors de prendre la dérivée de cette section, qui est un élément de $\Gamma(S, t_G \otimes \Omega_S^1)$, déterminé modulo une section de l'image du faisceau [], correspondant à l'indétermination du relèvement d'une section de A en une section de G. Les équations de Picard-Fuchs sont définies tout juste pour arriver, d'une telle section de [] (qui en fait est un *cocyle*, compte tenu de la connexion canonique de t_G provenant de G), avec l'indétermination qu'on vient de préciser, à tirer une section de O_S... (Du moins en caractéristique nulle, cas dans lequel se place Manin de toutes façons).

Voici les résultats positifs que j'ai vérifiés dans la direction des assertions précédentes :

a) Si S est de caractéristique nulle, les assertions 1° et 3° (sous la forme précisée par l'introduction du schéma en groupes $G(A)$) sont vraies.

b) Sans restriction sur S, il est vrai que $G(A)$ n'a pas d'automorphismes infinitésimaux[6], donc si pour deux relèvements infinitésimaux données B, B' de A, $G(B)$ et $G(B')$ sont isomorphes, l'isomorphisme entre eux est unique. Donc si l'hypothèse précédente est vérifiée quels que soient les relèvements infinitésimaux de A au dessus d'un ouvert U de la base S, alors les $G(B)$ définissent effectivement un cristal en groupes sur S, à fortiori les $H(B)$ définissent un cristal de modules, et $G(A)$ et $\mathrm{H}^1_{\mathrm{DR}}(A/S)$ sont munis de stratifications absolues canoniques, fonctorielle d'ailleurs en A satisfaisant aux conditions envisagées, et compatible avec tout changement de base qui invarie notre hypothèse sur A.

c) Les assertions 1° et 3° (sous la forme précisée par $G(A)$) sont vraies por les relèvements infinitésimaux *d'ordre* 1, ou tout au moins lorsque T est de la forme $D(J)$, schémas des nombres duaux dfini par un J quasi-cohérent.[7]

2.7. — Arrivé à ce point de mes brillantes conjectures, je m'aperçois avec consternation qu'elles sont fausses telles quelles, malgré les indications concordantes militant en leur faveur. De façon précise, soit k un corps de caractéristique $p > 0$.

[6] faux

[7] à vérifier, c'est peut-être faux

Je dis qu'il *n'est pas possible, pour tout k-schéma S de type fini, de dimension leq1* [8]*, avec S_{rg} régulier, et tout schéma elliptique A sur S, de mettre sur $\mathrm{H}^1_{DR}(A/S)$ une stratification relativement à k, qui soit fonctorielle en A et compatible avec les changements de base*. L'ennui, comme d'habitude, provient des courbes elliptiques de Hasse nul. Appliquant en effet les deux fonctorialités postulées, on trouve que l'homomorphisme "frobenius" qui va de $M^{(p)}$ dans M ($M = \mathrm{H}^1_{\mathrm{DR}}(A/S)$) serait compatible avec la stratification. Si alors $S \in S$ est un point correspondant à un A_S de Hasse nul, i.e. tel que frobenius sur $\mathrm{H}^1_{\mathrm{DR}}(A_S)$ soit de carré nul, on en conclurait aisément, grimpant sur les voisinages infinitésimaux de S, que la même propriété serait vraie aux points voisins de S, ce qui est évidement faux p.ex. pour la famille modulaire.

Ceci montre que décidément, il faut en rabattre, et que dans le titre du Chapitre et les considérations de **2.2.**, c'est à condition de prendre partout des isocristaux qu'il reste une chance d'un théorie du genre de celle envisagée précédemment. Il est fort possible d'ailleurs que la notion de isocristal que j'ai adoptée est encore trop restrictive, en ce sens que dans la description de **1.13**. il faudra peut-être prendre des stratifications en caractéristique nulle qui ne se prolongeraient pas nécessairement sur le schéma formel sur W = vecteurs de Witt tout entier. C'est une analyse soigneuse du calcul-clef de Washnitzer-Monsky qui devrait permettre de tirer cette question au clair.

2.8. — Il se pose la question, d'autre part, pour quels schémas abéliens les énoncés 1° et 3° de 2.4, 2.5. et 2.6. sont valables, en dehors du cas déjà signalé: S de caractéristique nulle.

Il n'est pas exclu entièrement, cependant, que en restant en car. $p > 0$, l'énoncé sur la non-variation infinitésimal de $G(A)$ avec A, A partout ordinaire, soit vrai. Cela impliquerait que sur l'ouvert des valeurs "ordinaires" de l'invariant, le H^1_{DR} a une stratification canonique, mais celle-ci ne se prolongerait pas à la courbe modulaire toute entière. Mais je dois dire que ce drôle de comportement, où on aurait une stratification naturelle en car. p et une autre en car. 0, sans qu'elles veuillent se recoller, semble assez canularesque.

[Les considérations précédentes font bien ressortir la nature "infinite" de la no-

[8] ou même ≤ 0 !

tion de stratification, par contraste avec celle de connexion, malgré les trompeuses apparences de la caractéristique nulle. Ainsi, sur le $\mathrm{H}^1_{\mathrm{DR}}$ de la famille modulaire sur $\mathbf{F}$ de schémas elliptiques, il y a au dessus de la fibre générique $S_{\mathbf{Q}}$ de S une stratification naturelle, mais nous venons de voir (ou presque...) que cette stratification ne s'étend pas en une stratification sur S_U, U un ouvert non vide de Spec($\mathbf{Z}$). (Le "presque" provient du fait qu'il n'est pas absolument clair si la stratification qu'on obtiendrait ainsi en caractéristique p serait respectée par frobenius; il faut absolument tirer au clair cet exemple particulier !). C'est en un sens assez moral, puisque pour nous le module à stratification doit jouer dans une large mesure le rôle d'un faisceau ℓ-adique, dont il partage également les propriétés de rigidité.]

Pour en revenir à l'alinéa précédent, concernant un schéma abélien "ordinaire" en car $p > 0$, s'il n'est pas exclu que le H^1_{DR} admette une stratification canonique fonctorielle, il me semble cependant exclu, malheureusement, que celle-ci provienne d'un cristal de modules sur S, i.e. que ceci reste vrai en remplaçant S par toute extension infinitésimale, pas nécessaire de car p, (tout au moins en admettant que la connexion associée à la stratification en question soit la connexion de Gauss-Manin). En effet, appliquant une telle hypothèse au schéma modulaire S sur $\mathbf{Z}_p$ précédent, dont on enlèverait les points de Hasse nul d'abord d'où S', on conclurait sauf erreur que la stratification qu'on a en caractéristique nulle sur H^1_{DR} se prolongerait à S tout entier, car elle se "recollerait" en un sens évident avec la stratification qu'on aurait au dessus du complété p-adique de S' (ce qui doit impliquer le prolongement sur S de façon assez formelle). Mais alors on aurait en car p une stratification du H^1_{DR} au dessus du schéma modulaire tout entier, Hasse nul inclus, ce qui est absurde comme on l'a déjà remarqué. Il faut en conclure, hélas, que si les isocristaux, et le cas échéant les modules stratifiés même en caractéristique $p > 0$, ont des chances d'être des outils convenables pour l'étude de familles de variétés abéliennes, celle de cristal elle-même semble irrémédiablement trop fine, même en se restreignant à des familles de variétés abéliennes "ordinaires" en car $p > 0$. Elle peut tout au mieux de prêter au cas d'un schéma de base réduit à un point, spectre d'un corps pas nécessairement parfait, et on peut alors espérer les résultats les plus satisfaisants en se bornant aux variétés abéliennes ordinaires ? - Pour que la notion de cristal elle-même puisse être utilisée pour des schémas abéliens sur des bases plus générales, il semble donc qu'il faille imposer aux familles envisagées des restrictions très sérieuses, consistant à imposer la variation infinitésimale du $G(A)$. Cela semble assez proche du point de vue de Serre, qui étudie les variations de variétés abéliennes (éventuellement à multiplication complexe donnée) en imposant à priori l'espace tangent (et l'action de la multiplication complexe dessus)...

Chapitre 3. — Remarques sur les groupes p-divisibles

3.1. — Bien sûr, en même temps que pour les variétés abéliennes, je dois en rabattre sur les groupes formels. Je veux simplement signaler que la construction de $G(A)$ dans **2.6.** doit pouvoir se paraphraser sans difficulté pour un groupe p-divisible $\varnothing$ sur un préschéma S à caractéristiques résiduelles égales au même p. En effet les homomorphismes de ce groupe dans le groupe formel associé à G_a sont triviales (en particulier, $\varnothing$ n'a pas d'automorphismes infinitésimaux), d'autre part (sauf erreur) le faisceau en modules des H^2 de $\varnothing$ à valeurs dans le groupe formel associé à G_a (au sens du complexe du groupe $\varnothing$, variante formelle), est un Module localement libre de rang g^*, où g^* est la dimension du groupe dual de $\varnothing$, soit $\varnothing^*$; plus précisément, ce Module doit être canoniquement isomorphe à $\mathrm{Lie}(\varnothing^*) = t_{\varnothing^*}$. (Tout ceci est suggéré par les résultats de Tate et Lubin sur les modules de groupes formels; je dois avouer d'ailleurs que je n'ai pas essayé de tirer au clair ce qu'il faut entendre, dans ce contexte, par "le groupe formel associé à G_a", et s'il y a lieu de prendre le groupe formel purement infinitésimal). Il s'impose alors de paraphraser la construction de Serre, en regardant l'extension universelle de $\varnothing$ par un groupe formel vectoriel, qui sera ici le groupe formel (covariant) de $t_{\varnothing^*}$. Désignant par $G(\varnothing)$ cette extension, son algèbre de Lie $\mathrm{H}(\varnothing)$ sers une extension

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow t^v_{\varnothing^*} \longrightarrow \mathrm{H}(\varnothing) \longrightarrow t_{\varnothing} \longrightarrow 0.$$

Bien entendu, $G(\varnothing)$ et par suite $\mathrm{H}(\varnothing)$ seront fonctoriels en $\varnothing$, et compatibles avec changement de base. Alors qu'il est certainement vrai, dans un sens qu'il conviendrait de préciser, que $G(\varnothing)$ varie "moins que $\varnothing$", quand on fait varier $\varnothing$ infinitésimalement dans une famille, il n'est pas vrai pour autant que $G(\varnothing)$ soit indépendant de telles variations (à l'exception, probablement, de celles du premier ordre), i.e. puisse être considéré comme provenant d'un cristal en groupes plus ou moins formels. Cela sera le cas seulement, sans doute, quand $\varnothing$ sera extension d'un groupe ind-étale par un groupe p-divisible torique, et S réduit à un point (?). Dans le cas général, il semble intéressant d'étudier les variations infitésimales de $\varnothing$, quand on se fixe celles de $G(\varnothing)$ à l'aide d'un cristal en groupes $\underline{G}$.

3.2. — En tous cas, l'extension $(*)$ semble un invariant intéressant du groupe p-divisible envisagé. Il subsiste, par passage à la limite, en passant au cas où S est par exemple le spectre d'un anneau A noethérien j-adique séparé et complet, où J est un idéal tel que A/J soit à caractéristiques résiduelles égales à p. On trouve par exemple un bon invariant quand A est un anneau de valuation discrète complet, éventuellement d'inégales caractéristiques, à caractéristique résiduelle p. Dans le cas où le groupe formel réduit a la structure triviale mentionnée plus haut dans **3.1.**, que la donnée d'un relèvement du groupe p-divisible qu'on a sur k en un groupe p-divisible sur A, soit entièrement équivalente à la donnée d'un relèvement de la filtration de $M \otimes_W k$ donnée par $(*)$, en une filtration de type (g, g^*) de $M \otimes_W A$. Il serait bien intéressant d'essayer de déterminer, en termes d'une telle donnée, quel est le module de Tate correspondant à la fibre générique de $\varnothing$! On aimerait préciser également, pour des groupes p-divisibles plus généraux, quelle quantité d'information est liée à l'extension $(*)$, qui remplace ici le H^1 de De Rham.