

Lettre de A. Grothendieck à P. Deligne ⁽¹⁾

7.8.74

Cher Deligne,

Étant peut-être empêché par mon jambe d'assurer un cours de 1^{er} cycle au 1^{er} trimestre, je vais peut-être à la place faire un petit séminaire d'algèbre, et envisage de le faire sur les fourbis de Mme Sinh, éventuellement transposés dans le contexte des "champs". À ce propos, je tombe sur le truc suivant, qui pour l'instant reste heuristique. Si M, N sont deux faisceaux abéliens sur un topos X , et $\tau_{\leq 2} \mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}(M, N) = E(M, N)$ est le complexe ayant les invariants

$$\begin{cases} \underline{H}^i = \underline{\mathrm{Ext}}^i(M, N) & \text{pour } 0 \leq i \leq 2 \\ \underline{H}^i = 0 & \text{si } i \notin [0, 2], \end{cases}$$

il doit y avoir un triangle distingué canonique

$$(T) \quad \begin{array}{ccc} & \underline{\mathrm{Hom}}(M, {}_2N)[-2] & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ E(M, N) & \xrightarrow{\quad} & E'(M, N), \end{array}$$

donc $E'(M, N)$ est un complexe dont les invariants \underline{H}^i sont ceux de $E(M, N)$ en degré $i \neq 2$, et qui en degré 2 donne lieu à une suite exacte

$$(*) \quad 0 \longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^2(M, N) \longrightarrow \overbrace{\underline{H}^2(E'(M, N))}^{P(M, N)} \xrightarrow{\sigma} \underline{\mathrm{Hom}}(M, {}_2N) \longrightarrow 0.$$

¹Ce texte a été déchiffré et transcrit par Matthias Künzer

Heuristiquement, $E'(M, N)$ est le complexe qui exprime le “2-champ de Picard strict” formé des 1-champs de Picard (pas nécessairement stricts) “épinglés” par M, N sur des objets variables de X , en admettant que ta théorie pour les 1-champs de Picard stricts s’étend aux 2-champs de Picard stricts (ce qui pour moi ne fait guère de doute); de même $E(M, N)$ correspond aux champs de Picard *stricts* épinglés par M, N . La suite exacte $(*)$ se construit en tous cas canoniquement “à la main”, où le terme médian est le faisceau des classes à “équivalence” près des champs de Picard épinglés par M, N , or étant l’invariant qui s’obtient en associant à toute section L d’un champ de Picard la symétrie de $L \otimes L$, interprété comme section de ${}_2N$. Je sais prouver (sauf erreur) que tout homomorphisme $M \rightarrow {}_2N$ provient d’un champ de Picard convenable (épinglé par M, N) (a priori l’obstruction est dans $\text{Ext}^3(X; M, N)$, mais un argument “universel” prouve qu’elle est nulle). Cela prouve que l’extension $(*)$ est bien proche d’être splittée : toute section du troisième faisceau, sur un objet quelconque de X , se remonte – en d’autres termes, l’extension a une section “ensembliste”. Bien sûr, il y a mieux en fait : toute section sur un $U \in \text{Ob} X$ “provient” d’un élément de $H^2(U, E'(M, N))$ (hypercohomolo - H^2).

Exemple. Soit A un anneau sur X , soient M, N respectivement les faisceaux K^0, K^1 associés au champ additif des A -Modules projectifs de type fini (p. ex.). Alors la construction de Mme Sinh nous fournit un champ de Picard épinglé par M, N , d’où une section canonique du terme médian $P(M, N)$ de $(*)$.

NB. Tout ce qui précède a les functorialités évidentes en M, N, X, \dots

Question. Le triangle exact (T) et la suite exacte $(*)$ sont-ils connus par les compétences (Quillen, Breen, Illusie...)? Connaissent-ils des variantes “supérieures”? (Un principe “géométrique” pour les obtenir pourrait être via des n -champs de Picard non nécessairement stricts...)

Je profite de l’occasion pour soulever une question sur la “cohomologie relative”. Soit $q : X \rightarrow Y$ un morphisme de topos. Si F est un faisceau abélien (ou un complexe d’iceux) sur Y , peut-on définir *fonctoriellement* en F la cohomologie relative $\mathbf{R}\Gamma(Y \text{ mod } X, F)$ (de la catégorie dérivée de $\text{Ab}(Y)$ dans celle de Ab)? L’interprétation “géométrique” en termes d’opérations sur des n -champs de Picard (n “grand”) suggère que ça doit exister. Mais je ne vois de construction évidente

“à la main” que dans les deux cas extrêmes :

- (a) q est “(-1)-acyclique”, i.e. pour tout F sur Y , $F \longrightarrow q_*q^*F$ est injectif (NB C’est le cas de $Y/P \longrightarrow Y$ si $P \longrightarrow e_Y$ est un épimorphisme – c’est donc le cas de $B_e \longrightarrow B_G$ plus haut.)

On prend

$$\mathbf{R}\Gamma(\text{Coker}(F \longrightarrow \underbrace{q_*(C(q^*(F)))}_{\text{résolution injective}})[-1]).$$

- (b) $\forall F$ injectif sur Y , $q^*(F)$ est injectif et $F \longrightarrow q_*q^*F$ est un épimorphisme (exemple : q inclusion d’un ouvert $U \hookrightarrow e_Y$). On prend

$$\mathbf{R}\Gamma_Y(\underbrace{\text{Ker}(C(F) \longrightarrow q_*q^*(C(F)))}_{\text{résolution injective}}).$$

Dans le cas général, la difficulté provient du fait que le cône d’un morphisme de complexes (tel que

$$F \longrightarrow q_*(q^*(F)) \quad)$$

n’est pas fonctoriel (dans la catégorie dérivée) par rapport à la flèche dont on veut prendre le cône. Et pourtant, dans le cas particulier actuel, il devrait y avoir un choix fonctoriel. Est-ce évident ?

Question pour Illusie : Dans sa théorie des déformations de schémas en groupes plats, il tombe sur des $H^3(B_G/X, -)$ resp. des $\text{Ext}^2(X; -, =)$. Peut-on court-circuiter sa théorie via la théorie (supposée écrite) des Gr-champs – resp. via ta théorie des champs de Picard ? J’ai [phrase incomplète]

Je te signale que j’ai réfléchi aux Gr-champs sur X . Si G est un Groupe sur X , N un G -Module, les Gr-champs sur X “épinglés par G, N ” forment a priori une 2-catégorie et même une 2-catégorie de Picard stricte, grâce à l’opération évidente à la Baer. On trouve que le complexe (de cochaînes) tronqué à 1 échelon à qui lui correspond est le tronqué

$$\tau_{\leq 2}(\mathbf{R}\Gamma(B_G \text{ mod } X, N)[1]).$$

(NB la cohomologie de $\mathbf{R}\Gamma(B_G \text{ mod } X, N)$ commence en degré 1.) Plus géométriquement, un Gr-champ sur X épinglé par (G, N) est essentiellement “la

même chose” qu’une 2-gerbe sur B_G , liée par N , et munie d’une trivialisaton au dessus de $X \approx B_e = (B_G)/P$ (où P est l’objet de B_G “torseur universel sous G ”). Ces 2-gerbes forment en fait une 3-catégorie de Picard a priori, mais il se trouve que dans celle-ci, les 3-flèches sont triviales (i.e. si source = but, ce sont des identités) – cela ne fait qu’exprimer $H^0(B_G/X, N) = 0$ (i.e. $H^0(B_G, N) \longrightarrow H^0(X, N)$ injectif...). Donc la 3-catégorie peut être regardée comme une 2-catégorie – et “c’est” celle des Gr-champs sur X épinglés par G, N . Si on veut localiser sur X , et décrire le 2-champs de Picard sur X des champs de Picard (sur des objets variables de X) épinglés par G, N , on trouve qu’il est exprimé par le complexe

$$\tau_{\leq 2}(\mathbf{R}p_{G*} \text{Coker}(N \longrightarrow \mathbf{R}q_{G*} \overbrace{C(q_G^* N)}^{\text{résolution injective}}))),$$

où $p_G : B_G \longrightarrow X$ et $q_G : B_e \approx X \simeq (B_G)_P \longrightarrow B_G$. Toutes ces descriptions étant compatibles avec des variations de G, N, X , cela donne en principe une description de la 2-catégorie des Gr-champs, avec X, G, N variables...