22.8.1967.

Cher Dieudonné,

Tu as bien fait de tiquer sur la généralisation que je suggérai de EGA I 10.10.5. Je pense que l'analogue nonnoethérien de l'équivalence de a) et c) doit sortir sans mal, mais en tous cas ces conditions ne sont pas impliquées par b). Pour le voir, soit $A = B[[T]]$, et définissons

$$M_n = A_n/J_n \quad , \quad \text{où} \quad A_n = B[T]/(T^{n+1}) \ , \ J_n = (X_0, X_1T, \ldots, X_nT^n)$$

en choisissant l'anneau B et les $X_n \in B$ de telle façon que les générateurs écrits de J_n soient en nombre minimal. IL suffit pour ceci de prendre pour B un anneau de polynômes

$$B = k[(X_i)_{i \geq 0}] \quad ,$$

on vérifie en effet que les générateurs écrits donnent alors dans J_n/TJ_n des éléments linéairement indépendants sur ~~B/T~~ $A_0 = A/TA = B$.

En effet, si les $a_i \in B$ $(0 \leq i \leq n)$ sont tels que

$$a_0X_0 + \ldots + a_nX_nT^n = F_0X_0T + \ldots + F_nX_nT^{n+1} \quad ,$$

où les F_n sont dans $B[T] = A[T,(X_i)]$, on voit pour tout i, $0 \leq i \leq n$, divisant par l'idéal engendré par les X_j avec $j \neq i$, qu'on a une relation

$$a_iX_iT^i = F_i'X_iT^{i+1} \quad \text{dans} \quad k[X_i,T] \ ,$$

où F_i' est l'image de F_i . Comme X_i et T sont des éléments réguliers de cet anneau, on en conclut que

$$a_i = F_i'\,T \quad \text{dans } k[X_i,T] \ ,$$

d'où évidemment $a_i = 0$, cqfd.

Je suggère donc de rédiger la nouvelle proposition 10.10.5 en disant qu'on a deux conditions équivalentes ~~xx~~ impliquant une troisième condition, et que cette dernière équivaut aux deux autres dans le cas noethérien. Il serait peut-être utile de donner aussi le contre-exemple qui précède.

92

J'ai découvert un canular ennuyeux dans EGA IV 17.1.6 (i), concernan le cas "formellement lisse". En effet, le démonstration via (16.5.17) ne marche que si on suppose $\Omega^1_{X/Y}$ de présentation finie, par exemple si f est localement de ~~présentati~~ type fini ! J'ignore donc si la notion "formellement lisse" est vraiment locale en haut ! On peut montrer que la question équivaut à la suivante: si A est un anneau commutatif, et M un A-Module (pas nécessairement de présentation finie) qui est "localement projectif sur Spec(A)", i.e. tel qu'il existe des f_i A engendrant l'idéal unité, avec M_{f_i} projectif sur A_{f_i} , alors M est-il un A-Module projectif ? (Je me rappelle avoir posé la question à D. Lazard, mais je ne me rappelle pas s'il l'avait résolue dans un sens ou dans l'autre. Je crois que non). Il faudrait donc à la prochaine occasion faire un errata pour 17.1.6 , dans lequel on ~~semblerait~~ signalerait également la formulation équivalente que je viens de signaler pour la question du caractère local de la lissité formelle. - Si la réponse devait être négative, il y aurait lieu de considérer aussi la notion de morphisme localement formellement lisse. En fait, dans tous les cas que j'ai rencontrés, ~~quand~~ on prouve toujours directement la lissité formelle globale, telle qu'elle est définie dans le texte.

J'ai fait lire mon projet de par.0 pour la réédition de EGA I à Samuel et Illusie, dont je te transmets certaines critiques. Page 4, au lieu de "quasi-totalité", il est plus prudent de dire "plupart". Page 8, j'utilise tantôt la terminologie "idéal racine", tantôt "idéal radical" et j'écris rad(J), - il faut unifier. Page 9, ligne 4, style vicieux, lire "comme anneaux de valeurs pour les coordonnées de solutions ... ". Page 10, donner en note de bas de page le sens du mot

93