Lettre de A. Grothendieck à L. Breen ([1])

Villecun 5.2.75

Cher Breen,

... Pour tout le reste de ta lettre, elle mériterait un lecteur plus averti, aussi, pour qu'elle ne soit pas entièrement perdue au monde, je vais l'envoyer à Illusie ! J'ai néanmoins constaté, avec intérêt, ton intérêt â demi refoulé pour des 2-catégories de Picard, n-catégories et autre faune de ce genre, et ton espoir que je te prouverai peut-être que ces animaux sont tout à fait indispensables pour faire des maths sérieuses dans telle circonstance. J'ai bien peur que cet espoir ne soit déçu, je crois que jusqu'à maintenant on a toujours pu d'en tirer en éludant de tels objets et l'engrenage dans lequel ils pourraient nous entraîner. Est-ce nécessairement une raison pour continuer à les éluder ? Les situations où on a l'impression "d'éluder" en effet me semblent en tous cas devenir toujours plus nombreuses - et si on s'abstenait de tirer une situation complexe et chargée de mystère au clair, chaque fois qu'on ne serait pas *forcé* de le faire pour des raisons techniques provenant de la math déjà faite, - il y aurait sans doute beaucoup de parties des maths aujourd'hui reputées "sérieusses" qui n'auraient jamais été developpées (Il n'est pas dit non plus que le mode s'en trouverait plus mal...). Ton commentaire (que j'ai également entendu chez Deligne) que la classification d'objets géométriques relativement merdiques se réduit finalement à des invariants cohomologiques essentiellement "bien connus" et relativement simples n'est pas non plus convainquant; n'est ce pas négliger la différence entre la *compréhension d'un objet géométrique*, et la détermination de sa "classe à isomorphisme (ou équivalence) près" ?

[1]Ce texte a été déchiffré et transcrit par Mateo Carmona

Tu me demandes des exemples "convainquants" de 2-catégories de Picard. Voici quelques exemples, en vrac (je ne sais s'ils seraient convainquants !):

1) Si L est un lien de centre Z sur le topos X, les *gerbes liées par* Z forment une 2-catégorie de Picard stricte, représentée par le complexe $\mathbf{R}\Gamma_X(Z)$ tronqué en degré 2, dont les objets de cohomologie non triviaux sont les $\mathrm{H}^i(X,Z)$, $0 \leq i \leq 2$. Les gerbes liées par L forment un *pseudo-2-torseur* sous le gerbe précédente, qui est un 2-torseur (i.e. non vide) si et seule si une certaine obstruction dans $\mathrm{H}^3(X,Z)$ est nulle. Pour comprendre cette classe de notre point de vue, il y a lieu de passer aux 2-champs correspondants: le 2-champs de Picard strict des z-gerbes sur des objets variables de X, et le 2-champ des L-gerbes sur des objets variables. Ce dernier est bel et bien un 2-torseur sous le champ précédent, or la classification de ces 2-torseurs (à 2-équivalence près) se fait par le $\mathrm{H}^3(X,Z)$, (tout comme les Z-L-gerbes peuvent être interprétées comme des torseurs sous la Z-L-champ de Picard strict des Z-torseurs, et sont classifiées par le $\mathrm{H}^2(X,Z)$). On voit déjà, bien sûr, poindre ici l'oreille de la 3-catégorie de Picard stricte des 2-gerbes liées par Z, ou (de façon équivalente) des 2-torseurs sous le 2-champ de Picard strict des Z-L-gerbes; cette 3-catégorie de Picard stricte étant décrite par $\mathbf{R}\Gamma_X(Z)$ tronqué en dimension 3, ayant comme invariants de cohomologie non triviaux les $\mathrm{H}^i(X,Z)$ $(0 \leq i \leq 3)$. Quant au 3-champ de Picard correspondant, il est décrit par une résolution injective de Z tronqué en degré 3, alors que le 2-champ de Picard précédent se décrivait en tronquant en degré 2.

2) Si M et N sont deux faisceaux abéliens sur X, les *champs de Picard* (**N.B.** 1-champs !) *d'invariants M et N* forment eux-même une 2-catégorie de Picard stricte, représentée sans doute par le complexe $\mathbf{R}\mathrm{Hom}(X(M),N)$ tronqué en degré 2, dont les invariants de cohomologie non triviaux sont donc "le drôle de Ext^2" de ma lettre à Deligne, et les honnêtes $\mathrm{Ext}^i(M,N)$ $(0 \leq i \leq 2)$. Les champs de Picard stricts forment une sous-2-catégorie de Picard pleine, représentée par $\mathbf{R}\mathrm{Hom}(M,N)$ tronqué en degré 2, d'invariants les $\mathrm{Ext}^i(M;N)$ $(0 \leq i \leq 2)$. Bien sûr, Ext^2 donne les 0-objets à équivalence près, Ext^1 les automorphismes à isomorphisme identique []... Je n'ai pas réfléchi à une bonne interprétation géométrique de la n-catégorie de Picard

associée à $\mathbf{R}\mathrm{Hom}(M,N)$ tronqué en degré n, et encore moins bien sûr pour $\mathbf{R}\mathrm{Hom}(X(M),N)$, mais sans doute il faut regarder dans la direction des n-champs de Picard.

3) Soit G un Groupe sur X, opérant sur un faisceau abélien N. Les *champs en* Gr-*catégories sur X liés par* (G,N) forment une 2-catégorie de Picard, dont les invariants sont $\mathrm{H}^3(\mathrm{B}_G\, mod X, N)$, $\mathrm{H}^2(\mathrm{B}_G\, mod X, N)$ et $\mathrm{Z}^1(G,N)$ (groupe des 1-cocycles de G à coefficients dans N) - je te laisse le soin de deviner quel est le complexe qui le décrit ! J'ai écrit il y a quelques mois à Deligne à ce sujet, et l'ai prié de t'envoyer une copie de la lettre.

4) Soit X un topos localement annelé, on peut considérer les *Algèbres d'Azumaya sur X* (i.e. les Algèbres localement isomorphes à une algèbre de matrices d'ordre n, $n \geq 1$) comme les objets d'une 2-catégorie de Picard, où la catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}(A,B)$, pour A et B des Algèbres d'Azumaya, est la catégorie des "trivialisations" de $A^\circ \otimes B$, i.e. des couples $(E,\varnothing)$, E un Module localement libre et $\varnothing$ un isomorphisme $\underline{\mathrm{End}}(E) \simeq A^\circ \otimes B$. Il faut travailler un peu pour définir les accouplements $\underline{\mathrm{Hom}}(A,B) \times \underline{\mathrm{Hom}}(B,C) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(A,C)$; l'opération $\otimes$ dans la 2-catégorie de Picard à construire est bien sûr le produit tensoriel d'Algèbres, et l'opération "puissance —1" est le passage à l'algèbre opposée. On vérifie qu'en associant à toute Algèbre d'Azumaya la 1-gerbe de ses trivialisations, on trouve un 2-$\otimes$-foncteur de la 2-catégorie de Picard (dite "de Brauer") dans celle des 1-gerbes liées par $\underline{G_m}$, qui est 2-fidèle. Les invariants de la première sont donc les groupes $\mathrm{H}^2(X,\underline{G_m})_{\mathrm{Br}}$, $\mathrm{H}^1(X,\underline{G_m})$ et $\mathrm{H}^0(X,\underline{G_m})$, où dans le premier terme l'indice Br désigne le sous-groupe du H^2 formé des classes de cohomologie provenant d'Algèbres d'Azumaya. On aurait envie de parler du 2-champ de Picard des Algèbres d'Azumaya sur des objets variables de X, mais c'est bien une 2-catégorie de Picard fibrée sur X, mais pas tout à fait un 2-champ (whatever that means), san doute - la condition de 2-recollement (whatever that means) ne doit pas être satisfaite - sinon il n'y aurait pas d'indice Br au H^2...

La considération des n-catégories de Picard strictes (qui s'imposent à nous pas à pas dans un contexte essentiellement "commutatif") me semblent la clef du passage de l'algèbre homologique ordinaire ("commutative"), en termes de complexes, à une algèbre homologique non commutative, du fait qu'elles donnent une interprétation géométrique correcte des "complexes tronqués à l'ordre n" (en tant qui objets de catégories dérivées), donc, essentiellement (par passage à la limite sur n) des complexes tout courts. L'idée naïve qui se présente est alors que les "complexes non commutatifs" (qui seraient les objets-fantômes d'une algèbre homologique non commutative) sont peut-être ce qui reste des n-catégories de Picard (strictes) quand on oublie leur caractère additif, i.e. leur structure de Picard - c'est à dire qu'on ne retient que la n-catégorie ! (Quand on se place sur un topos X, on s'intéresse donc aux n-champs sur X...) A vrai dire, cette idée est venue d'abord d'une autre direction, quand il s'est agi en géométrie algébrique de démontrer des *théorèmes de Lefschetz* à coefficients discrets en cohomologie étale, dans le cas d'une variété projective disons et de toute section hyperplane, ou d'une variété quasi-projective et de presque toute section hyperplane (pour ne mentionner que le cas global le plus simple), sous les hypothèses de profondeur cohomologique "le plus naturelles" (en fait, essentiellement des conditions nécessaires et suffisantes de validité du dit théorème). Dans le cas commutatif, les techniques de dualité nous suggèrent très clairement quels sont les meilleurs énoncés possibles, cf. l'exposé de Mme Raynaud dans SGA 2. Mais ces techniques ne valent qu'en se restreignant à des coefficients premiers aux caractéristiques, alors que des démonstrations directes plus géométriques (développées dans SGA 2 avant le développement du formalisme de la cohomologie étale) donnaient des résultats très voisins pour le H^0 et le H^1 (ou le π_0 et le π_1, si on préfère) sans telles restrictions, du moins dans le cas propre (i.e. projectif, au lien de quasi-projectif). En fait, ce sont les "résultats les meilleurs possibles" eux-mêmes, énoncés comme conjectures dans SGA 2 dans l'exposé cité de Mme Raynaud, qui sont démontres ultérieurement par elle dans sa thèse. Ce qui est remarquable de notre point de vue, c'est que les énoncés les plus forts se présentent le plus naturellement sous forme d'énoncés sur des *1-champs* sur le site étale de la variété algébrique considérée - la notion de "profondeur $\geq i$ (pour $i = 1, 2, 3$) s'énonçant aussi le plus naturellement en termes de champs. Non seulement cela, mais alors même qu'on voudrait ignorer la notion technique de champ et travailler exclusivement en termes de H^0 et H^1 en utilisant à bloc le formalisme cohomologique non commutatif de Giraud, pour démontrer disons un théorème de bijectivité $\pi_1(Y) \longrightarrow \pi_1(X)$ (ce qui est le résultat le plus profond établi dans la thèse de Mme Raynaud), il semble bien qu'on n'y arrive pas, faute à ce formalisme d'avoir la souplesse nécessaire. En fait, il faut utiliser comme ingrédients techniques, de façon essentielle, les trois théorèmes suivantes directement pour les 1-champs "de torsion" (i.e. où les faisceaux en groupes d'automorphismes sont de ind-torsion):

a) théorème de changement de base pour une morphisme propre ;

b) théorème de changement de base par un morphisme lisse ;

c) théorème de "propreté cohomologique générique" pour un morphisme de type fini $f : X \longrightarrow S$, S intègre (disant que l'on peut trouver dans S un ouvert $U \neq \varnothing$ tel que pour *tout* changement de base $S' \longrightarrow S$ se factorisant par u, la formule de changement de base est vraie).

(Pour b) et c), il faut faire des hypothèses que les faisceaux d'automorphismes sont premiers aux charactéristiques, et dans c) ne servent que dans la version "générique" du théorème de Lefschetz). C'est avec en vue de telles applications que Giraud a pris la peine dans son bouquin (si je ne me trompe) de démontrer a), b) (et c) ?) dans le contexte des 1-champs et de leurs images directes et inverses. Mais du même coup il dévient clair que le contexte "naturel" des théorèmes de changement de base en cohomologie étale, des théorèmes du type de Lefschetz (dits "faibles") sur les "sections hyperplanes", tout comme de la notion de profondeur qui y joue un rôle crucial, doit être celui des n-champs. Et que le développement hypothétique de ce contexte ne risque pas de se réduire à une jonglerie purement formelle et absolument bordélique avec du "general nonsense", mais qu'on se trouvera aussitôt confronté à des tests "d'utilisabilité" aussi sérieux que la démonstration des théorèmes de changement de base et ceux du type de Lefschetz (qui même dans le contexte commutatif ne sont pas piqués de vers...). [] pour variantes analytiques complexes etc.

Je ne sais si ces commentaires te "passent par dessus la tête" à ton tour, ni si elles te donnent l'impression qu'il aurait peut-être des choses intéressantes à tirer au clair. Si cela t'intéresse, je pourrais expliciter sous forme un peu plus systématique quelques ingrédients d'une hypothétique algèbre homologique non commutative et les liens de celle-ci à l'algèbre homologique commutative. Plus mystérieux pour moi (et pour cause, vu mon ignorance en homotopie) seraient les relations entre celle-là et l'algèbre homotopique, i.e. les structures semi-simpliciales, et je n'ai que des commentaires assez vagues à faire en ce (*). Par ailleurs, je te rappelle que même l'algèbre homologique commutative n'est pas, il s'en faut, dans un état satisfaisant, pour autant que je sache, vu qu'on ne sait toujours pas quelle est la "bonne" notion de catégorie triangulée. Or il me semble bien clair que ce n'est pas une question purement académique - même si on a pu se passer de le savoir jusqu'ici (en se bornant comme Monsieur Jourdain à "faire de la prose sans le savoir" - en travaillant sur des catégories de complexes, éventuellement filtrés, sans trop se demander quelles structures il y a sur ces catégories...).

Bien cordialement à toi,

A. Grothendieck

P.S. Réflexion faite, j'ai quand même envie de te mettre un peu en appétit, en faisant ces "quelques commentaires assez vagues". Il s'agit du yoga qu'une (petite) n-catégorie ou groupoïdes (à n-équivalence près) "est essentiellement la même chose" qu'une ensemble semi-simplicial pris à homotopie près et où on néglige les π_i pour $n+1 \geq i$ (où, si tu préfères, "où on a tué les groupes d'homotopie en dimension $\geq n+1$). Voici des éléments heuristiques pour ce yoga. Si $K_\bullet$ est un ensemble simplicial (il peut être prudent de le prendre de Kan) on lui associe une n-catégorie $C_n(K_\bullet)$, dont les 0-objets sont les

En fait, $C_n(K_\bullet)$ est un n-groupoïde, i.e. une n-catégorie où toute

Bien entendu, rien n'empêche de considérer aussi la notion de ∞-catégorie, à laquelle celle de n-catégorie est comme la notion d'ensemble semi-simplicial tronqué à celle d'ensemble semi-simplicial. Sauf erreur, la localisée de la catégorie des ∞-catégories, pour les flèches de ∞-équivalence, est équivalente à "la catégorie homotopique", localisée de la catégorie des ensembles semi-simpliciaux, ou du moins une sorte de complétée de celle-là. Dans cette optique, le tapis consistant à interpréter une ∞-catégorie de Picard stricte (i.e. quelque chose qui ressemble à un groupe abélien de la catégorie des ∞-catégories) comme donnée (à ∞.équivalence près) par un complexe de chaînes regardé comme un objet d'une catégorie dérivée, est à relier au tapis de Dold-Puppe, interprétant ces derniers comme des groupes abéliens semi-simpliciaux.

Pour se donner confiance dans ce yoga général, on peut essayer d'interpréter en termes de n-catégories ou ∞-catégories des constructions familières en homotopie. Ainsi, l'espace des lacets $\Omega(K_\bullet, x)$ correspond manifestement à la $(n-1)$-catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}(x, x)$ formée des i-flèches de C $(1 \leq i \leq n)$ dont la 0-origine et la 0-extrémité sont x, réindexées en les appelant $(i-1)$-flèches. Je n'aperçois pas à vue de nez un joli candidat pour la suspension en termes de n-catégories. Par contre le $\mathrm{Hom}_\bullet(K_\bullet, K'_\bullet)$ doit correspondre au $\underline{\mathrm{Hom}}(C, C')$, qui est une n-catégorie quand C, C' en sont. La "fibre homotopique" d'une application semi-simpliciale $f : K_\bullet \longrightarrow K'_\bullet$ (transformée d'abord, pour les besoins de la cause, en une fibration de Serre par le procédé bien connu de Serre-Cartan) correspond sans doute à l'opération bien familière de produit $(n+1)$-fibré (du moins les cas $n = 0, 1$ sont bien familiers !) [] pour des n-foncteurs $c \longrightarrow C'$ et $C'' \longrightarrow C'$, dans le cas où C'' est la n-catégorie ponctuelle, donc la donnée de $C'' \longrightarrow C'$ correspond à la donnée d'un 0-objet de C'. Les espaces $K(\pi, n)$ ont une interprétation évidente comme n-gerbes liées par π. Enfin, on voit aussi poindre l'analogue du dévissage de Postnikoff d'un ensemble semi-simplicial - mais la façon dont je l'entrevois (vue ma prédilection pour les topos) passe par la notion de topos classifiant d'un n-groupoïde (généralisant de façon évidente le topos classifiant d'un groupe). En termes de cette notion, on peut, il me semble, interpréter un n-groupoïde en termes d'un $(n-1)$-groupoïde (savoir son tronqué), *muni* d'une n-gerbe sur le topos classifiant, liée par π_n ("fordu" bien sûr par l'action du π_1...).

Bien sûr, il faut relativiser encore tout le yoga qu'on vient de décrire, au dessus d'un topos quelconque X. Il s'agirait donc de mettre en relation et d'identifier, dans un certaine mesure, d'une part l'algèbre homotopique sur X, d'autre part l'algèbre catégorique sur X construite en termes de la notion de n-champ en groupoïdes ($n \geq 0$ fini ou infini). On espère que la notion d'image inverse de faisceau semi-simplicial par un morphisme de topos $f : X \longrightarrow X'$ (qui est évidente) correspond à la notion évidente d'image directe de n-champs; et inversement, la notion évidente d'image directe de n-champs par f devrait correspondre à une notion plus subtile d'image directe $\mathrm{End}_*(K_\bullet)$ d'un faisceau semi-simplicial, construit sansa doute dans l'esprit des foncteurs dérivés à partir de la notion naïve (mais on hésite s'il faut mettre Lf_* ou End_*)... Les dévissages à la Postnikoff doivent avoir encore une interprétation remarquablement simple en termes de n-champs. Comparer à la remarque de Giraud qu'un 1-champ en groupoïdes sur X peut s'identifier au couple d'un faisceau π_0 sur X, et d'une 1-gerbe sur le topos induit $X_{/\pi_0}$ (dont le lien, comme de juste, devrait être note π_1 !). D'ailleurs, dans le cas des 1-champs en groupoïdes, la traduction de ces animaux en termes de topos classifiants au dessus de X est, je crois, développé en long et en large dans Giraud (il parle, si je me rappelle bien, d'"extensions" du topos X). L'extension (si j'ose dire) de ce tapis aux n-champs ne devrait pas poser de problème.

Remords : tâchant de préciser heuristiquement la notion de topos classifiant d'un n-champ en groupoïdes (ou plus particulièrement, d'un n-groupoïde) pour $n \geq 2$, je vois que je n'y arrive pas à vue de nez. (Bien sûr, il suffirait (procédant de proche en proche) de savoir définir un topos classifiant raisonnable pour une n-*gerbe*, liée par un faisceau abélien π_n). Donc je ne sais comment décrire le dévissage de Postnikoff en termes de n-champs, sauf pour $n \leq 2$. Ceci est lié à la question d'une description directe des groupes de cohomologie d'un n-groupoïde C (ou d'un n-champ), à coefficients disons dans un système local commutatif, de façon que pour $C = C_n(K_\bullet)$, $K_\bullet$ un ensemble semi-simplicial dont les π_i pour $i \geq n+1$ sont nuls, on trouve les groupes de cohomologie correspondants de $K_\bullet$. Peut-on le faire en associant à C, de façon convenable, un ensemble semi-simplicial "nerf" de C ?

Bien entendu, si on réussit à définir un topos classifiant pour C, celui-ci devrait être homotope à $K_\bullet$ ci-dessus, donc avoir les mêmes invariants homotopiques π_i et cohomologiques H^i ; itou pour les champs. La définition habituelle du topos classifiant, dans le cas $n = 1$, a bien cette vertu. Cas particulier typique de problème de la définition du topos classifiant : pour π un groupe commutatif, trouver un topos canonique (fonctoriel en π bien sûr...) ayant le type d'homotopie de $K(\pi, n)$, et qui généralise la définition du topos classifiant pour $n = 1$ (topos des ensembles où π opère). On frémit à l'idée que les topos pourraient ne pas faire l'affaire, et qu'il y faille des "n-topos" !! (J'espère bien que ces animaux n'existent pas...)

La théorie "d'algèbre homologique non commutative" que j'essaie de suggérer pourrait se définir, vaguement, comme l'étude parallèle des notions suivantes et de leurs relations des notions suivantes et de leurs relations multiples :

a) espaces topologiques, topos ;

b) ensembles semi-simpliciaux, faisceaux semi-simpliciaux etc ;

c) n-catégories (notamment n-groupoïdes), n-champs (notament n-champs en groupoïdes) etc ;

d) complexes de groupes abéliens, de faisceaux abéliens.

(Les "etc" réfèrent surtout aux structures supplémentaires qu'on peut envisager sur les objets du type envisagé...)

C'est donc de l'algèbre avec la présence constante de motivations provenant de l'intuition topologique. Si une telle théorie devait voir le jour, il lui faudrait bien un nom, je me demande si "algèbre topologique" ne serait pas le plus adéquat ("algèbre homologique non commutative" ne peut guère aller à la longue, pour des raisons évidentes). Ce qui est aujourd'hui parfois désigné sous ce [ ] n'est guère qu'un bric à brac de notions (telles que anneau topologique, corps topologique, groupe topologique etc) qui ne forment guère un corps de doctrine cohérent - il ne s'impose donc pas que cela accapare un nom qui servirait mieux d'autres usages. (Comparer le nouvel usage du terme "géométrie analytique" introduit par Serre, et qui ne semble guère avoir rencontré de résistance.)

Re-salut, et au plaisir de te lire,

A. Grothendieck