Joindre SGA 7 $\underline{\text{VI}}$? Arr. $\underline{\text{II}}$

Bures sur Yvette, le 21 octobre 1968

Cher Grothendieck,

En fait, il n'est pas nécessaire de faire de savants recollages de complexes cotangents pour prouver que

<u>proposition</u> : <u>Soit</u> X <u>un espace analytique complexe compact</u>. <u>Pour que</u> X <u>soit un schéma</u>, <u>il faut et suffit que</u> X_{red} <u>le soit</u>

On se ramène à ~~supposer~~ montrer que si X_0 est défini par un Idéal de carré nul, soit $\mathcal{N}$, de X, alors

$$(X_0 \text{ est un schéma}) \Longrightarrow (X \text{ est un schéma})$$

Soit $E^{an}(X_0, \mathcal{N})$ et $E^{alg}(X_0, \mathcal{N})$ les groupes analytiques et algébriques d'extensions infinitésimales de X_0 par $\mathcal{N}$. Soit enfin K le complexe cotangent de X_0, <u>donné localement, dans la catégorie dérivée</u>. Il s'obtient en plongeant <u>localement</u> (Zariski, ou étale) X_0 dans un schéma lisse ... et permet de définir

(1) $\mathcal{H}om(K, \mathcal{N})$ et $\mathcal{E}xt^1(K, \mathcal{N})$.

Soit le diagramme :

(2)
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^{1\,alg}(X_0, \mathcal{H}om(K, \mathcal{N})) \arrow[r] \arrow[d] & E^{alg}(X_0, \mathcal{N}) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & H^0(X_0, \mathcal{E}xt^1(K, \mathcal{N})) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & H^{1\,an}(X_0, \mathcal{H}om(K, \mathcal{N})) \arrow[r] & E^{an}(X_0, \mathcal{N}) \arrow[r, "\beta"] & H^{0\,an}(X_0, \mathcal{E}xt^1(K, \mathcal{N}))
\end{tikzcd}$$

Vu les significations (locales) de (1), les lignes sont exactes ; par GAGA, les flèches verticales extrêmes sont des isomorphismes. Reste à ~~comparer les images de α et β~~ montrer que $\operatorname{Im}(\beta) \subset \operatorname{Im}(\alpha)$.

74

Soit donc U_i un recouvrement affine de X_0, et

$$e \in \overset{(alg)}{H^0}(X_0, \mathcal{E}xt^1(K, \mathcal{N}))$$

représenté par des classes d'isomorphie (algébriques) d'extensions U_i' de U_i par $\mathcal{N}|U_i$, classes d'isomorphie qui se recollent :

soit η_{ij} un isomorphisme $U_j'|U_i \cap U_j \xrightarrow{\sim} U_i'|U_i \cap U_j$.

L'obstruction à construire des η_{ij} tels que $\eta_{ij}\eta_{jk} = \eta_{ik}$ est donnée par $d_2\eta$ où d_2 est une certaine flèche

$$d_2 : H^0(X_0, \mathcal{E}xt^1(K, \mathcal{N})) \longrightarrow H^2(X_0, \mathcal{H}om(K, \mathcal{N}))$$

La même construction marche dans le cas analytique, et on conclut par une nouvelle application de GAGA.

Rmq : idem pour les espaces algébriques, espaces rigides analytiques, schémas formels

~~Rmq~~ :

Bien à toi

P. Deligne

75

https://grothendieck.umontpellier.fr
Université de Montpellier, UMR CNRS 5149, Case courrier 051, Place Eugène Bataillon
34095 Montpellier cedex 5 - France