SUR LES ESPACES (F) et (DF) (*)

Par ALEXANDRE GROTHENDIECK

INTRODUCTION

1. Sujet.

Le présent article a été inspiré par le travail fondamental [3] (1) et a pour principal objet la solution des questions posées à la fin de ce travail. Pour ne pas trop allonger cet article, nous ne donnerons pas, ici, divers prolongements intéressants aux questions abordées. Un article ultérieur contiendra une étude des espaces limites inductives généralisées d'une suite d'espaces (F) (espaces qui semblent bien plus fréquents en pratique que les espaces (LF) considérés d'abord dans [3]) avec des applications à divers espaces fonctionnels introduits par L. SCHWARTZ. L'essentiel du § I du travail présent a été annoncé dans une note aux Comptes-Rendus [4] (2).

Le § I contient une étude systématique des espaces duals forts d'espaces (F), ou plutôt des résultats positifs de la théorie. Une propriété fondamentale de ces espaces, et qui peut servir de base à la plupart des propriétés ultérieures, nous amène à introduire un nouveau type d'espaces, les espaces (DF) (théorème 1 et définition 1) comprenant, en plus des duals forts d'espaces (F), les espaces normés et les limites inductives (au sens le plus général) de suites d'espaces normés. La plupart des résultats de ce paragraphe sont applicables aux espaces (DF) généraux. Parmi les résultats intéressants, citons: le théorème 1 et ses corollaires, en particulier le bidual fort d'un espace (F) est un espace (F); le dual fort d'un

(*) Manuscrito recebido a 12 de dezembro de 1952.

(1) Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de cet article.

(2) En attendant la publication des démonstrations des résultats annoncés, ceux-ci ont été démontrés de nouveau (et indépendamment) par B. Donoghue et K. T. Smith (ses démonstrations se trouvent d'ailleurs être identiques aux miennes.) Il retrouve d'ailleurs la prop. 4 de cet article (qui n'était qu'implicite dans ma note) et donne un cas particulier du théorème 10 pour E réflexif).

espace (F) *distingué* est bornologique (3); un espace (DF) dont les parties bornées sont métrisables est tonnelé (4), ce qui donne une condition des plus commodes pour décider p. ex. qu'un espace (F) donné est distingué; le théorème de dualité usuel qui donne le dual d'un sous-espace vectoriel F d'un espace E est vrai quand F est un espace (F) *distingué* (th. 7). Au N.° 5, nous appliquons certains de ces résultats aux espaces (LF).

Le § II donne des contre exemples divers. Les trois premiers numéros donnent des contre exemples pour toutes les questions dans [3] qui ne sont pas résolues par l'affirmative dans le présent travail. Tous ces exemples sont pris dans le champ des "espaces parfaits" de M. G. Köthe ([9] et [10]), espaces qui par leur maniement commode semblent particulièrement bien adaptés à de tels usages. Nous n'avons eu, en partie, qu'à reprendre avec quelques modifications des constructions déjà faites par cet auteur à des fins différentes. L'exemple du N.° 1, donnant entre autres un espace (F) non distingué, est essentiellement dû à M. Köthe, qui a bien voulu me permettre de le publier ici.

Au § III nous introduisons deux nouveaux types d'espaces, les "espaces quasi-normables" et les "espaces de Schwartz", en connection avec la question 12 de [3]. Pour les espaces (F) qui sont des espaces de Schwartz, les théorèmes de dualité usuels sont toujours vrais. De plus, ces espaces forment une classe remarquablement stable pour les opérations courantes. Pour finir, nous donnons une liste de questions non résolues.

Je suis heureux d'exprimer à M. J. Dieudonné toute ma reconnaissance pour l'intérêt qu'il a pris dans mes recherches, et le soin avec lequel il a bien voulu lire le manuscrit de cet article et des précédents, et en améliorer la rédaction; ainsi qu'à M. L. Schwartz, auquel je suis redevable pour la plus grande partie de mon initiation à l'Analyse Fonctionnelle. Enfin, j'adresse à M. N. Bourbaki tous mes remerciements, pour m'avoir accordé l'avantage de

(3) Voir plus bas dans l'Introduction pour la terminologie.

(4) Ce fait, apparement déjà connu de Banach, se démontre ainsi: on prend dans la boule unité de H une famille d'éléments (x_i) partout dense et on définit une application linéaire continue de l^1 (I) dans H par u ($(\lambda_i) = \Sigma \lambda_i x_i$. Il est très facile de voir que c'est là un homomorphisme *sur*, et même que H s'identifie, *avec sa norme*, à un espace quotient de l^1 (I). Noter que si H est séparable, on peut prendre I dénombrable.

lire son manuscrit sur les espaces vectoriels topologiques, et profiter ainsi de la clarté et profondeur de vues, en cette matière encore, de l'illustre Maitre.

2. Terminologie

Nous suivons de façon générale la terminologie des "Éléments" de N. Bourbaki. Tous les espaces vectoriels envisagés sont supposés localement convexes, et à leur égard nous suivons pour l'essentiel les notations de [3] et de [2]. Toutefois, nous suivons le deuxième de ces articles, contrairement à la terminologie de [3], en appelant *réflexif* (au lieu de semi-réflexif) les espaces dont les parties bornées sont relativement faiblement compactes, et *complètement réflexifs* (au lieu de réflexifs) les espaces *réflexifs et tonnelés*, i. e. les espaces E tels que l'application naturelle de E dans le dual fort E'' de E' fort soit un isomorphisme sur E''. De plus, nous appelons espace (M) tout espace dont les parties bornées sont relativement compactes; pour les espaces métrisables, cette terminologie coincide avec celle de [3]. Enfin, l'expérience montre qu'il y a lieu de considérer comme topologie "naturelle" sur le bidual E'' de E, non pas la topologie forte de dual de E' fort (topologie de la convergence uniforme dans les parties *fortement bornées* de E'), mais celle de la convergence uniforme dans les parties *équicontinues* de E'; cette topologie admet un système fondamental de voisinages de l'origine formé par les adhérences faibles (dans E'') des voisinages de l'origine dans E, et elle induit sur E la topologie propre de E. Sauf mention expresse du contraire, le bidual E'' considéré comme espace vectoriel topologique sera toujours muni de cette dernière topologie. Quand nous parlerons au contraire de E'' faible, il s'agira bien entendu de la topologie faible définie par la dualité de E'' avec E'. On notera que la topologie naturelle et la topologie faible sur E'' y définissent les mêmes parties bornées, comme il résulte du fait que les parties équicontinues et faiblement fermées de E' sont faiblement compactes, donc fortement complètes, et du critère de Mackey (mis sous la forme commode du th. 2 de [2]).

Conformément à [2], l'espace localement convexe E est dit *tonnelé* si toute partie faiblement bornée de son dual est équicontinue. Il nous sera commode d'appeler E *quasi-tonnelé* si les parties *fortement* bornées de son dual sont équicontinues. Ces deux notions coincident si E est complet (toujours en vertu de [2], th. 2). Si E est métrisable, E est quasi-tonnelé, mais il peut ne pas être tonnelé s'il n'est pas complet.

Si A et B sont deux parties de l'espace localement convexe E, nous dirons que A *absorbe* B s'il existe un $\lambda > 0$ tel que $A \supset \lambda B$. E est dit *bornologique* si tout ensemble convexe cerclé dans E qui absorbe les parties bornées est un voisinage de 0. Cela implique que E est quasi-tonnelé (la réciproque étant probablement inexacte).

Soit E un espace localement convexe, E' son dual fort; rappelons qu'un système fondamental de voisinages de 0 dans E' est formé des ensembles convexes cerclés *faiblement* fermés U qui engendrent E'. Dire qu'il suffise même que U soit seulement *fortement* fermé pour être un voisinage de 0, signifie aussi que E' est tonnelé, ou encore que toute partie bornée de son dual faible E'' est équicontinue. D'autre part, un système fondamental de parties équicontinues de E'' (considéré comme dual de E' fort) est formé, d'après le "théorème des bipolaires" ([3], prop. 1) des adhérences faibles dans E'' des parties bornées de E. L'hypothèse précédente signifie donc aussi que toute partie bornée de E'' est contenue dans l'adhérence faible d'une partie bornée de E. Nous dirons alors, avec [3], que E est *distingué*.

Enfin, nous utiliserons au § I, N.° 1 la notion, introduite dans [2], d'application bilinéaire hypocontinue $u(x, y)$ d'un produit de deux espaces localement convexes E, F dans un troisième G. Cette notion est relative à la donnée d'un ensemble $\mathfrak{G}_1$ de parties bornées de E et un ensemble $\mathfrak{G}_2$ de parties bornées de F. Il est indiqué de dire, plus généralement, qu'un *ensemble* M d'applications bilinéaires $u(x, y)$ de $E \times F$ dans G est équi-hypocontinu, relativement à $\mathfrak{G}_1$ et $\mathfrak{G}_2$, si pour tout $A \in \mathfrak{G}_1$, les applications $y \to u(x,y)$, quand x parcourt A et u parcourt M, forment un ensemble équicontinu d'applications linéaires de F dans G; et si la condition analogue est vérifiée pour tout $B \in \mathfrak{G}_2$. Quand nous ne spécifions

pas $\mathfrak{G}_1$ et $\mathfrak{G}_2$ (en disant simplement que u est hypocontinue, ou M équi-hypocontinu), il sera sous-entendu que $\mathfrak{G}_1$ et $\mathfrak{G}_2$ seront l'ensemble de *toutes* les parties bornées de E resp. F. Enfin, quand $\mathfrak{G}_1$ et $\mathfrak{G}_2$ se réduisent respectivement à l'ensemble des parties *finies* de E ou F, on dira simplement que u est *séparément continue*, ou que M est *séparément équicontinu*.

I. Théorie des espaces (DF).

1. Une propriété de stabilité de l'ensemble des voisinages de zéro dans le dual fort d'un espace (F). Espace (DF).

Théorème 1. *Soit E un espace localement convexe métrisable, (A_i) une suite de parties équicontinues de son bidual, dont la réunion A soit bornée. Alors A est équicontinu.*

L'énoncé dual est: *Si (U_i) est une suite de voisinages de* 0 *dans E' fort, convexes, cerclés et fortement fermés, dont l'intersection U engendre E', alors U est voisinage fort de* 0 *dans E'.* Cela signifie aussi que U contient un ensemble convexe cerclé et *faiblement* fermé W qui engendre E'. Pour construire W, on désigne par (K_n) une suite fondamentale de parties fortement bornées, convexes, cerclées et faiblement fermées de E', et on construit par récurrence une suite de nombres positifs $\lambda_i > 0$ et de voisinages convexes cerclés et *faiblement* fermées W_i de 0, de telle façon que l'on ait (en supposant la construction des deux suites faite jusqu'au rang n):
1) $\lambda_i K_i \subset 1/2^{i+1} U$, 2) $\lambda_i K_i \subset W_j$, 3) $W_i \subset U_i$ (pour $i, j \leq n$).
Si alors la construction infinie est possible, l'ensemble $W = \bigcap W_i$ engendre E' (car il contient les $\lambda_i K_i$), il est convexe, cerclé et faiblement fermé (les W_i l'étant) et contenu dans $\bigcap U_i = U$, et tout sera fait. Montrons donc que la récurrence peut effectivement se poursuivre du rang n au rang $n+1$. On choisira pour cela λ_{n+1} assez petit pour qu'on ait

$$\lambda_{n+1} K_{n+1} \subset (1/2^{n+2})\, U \cap \bigcap_{i=1}^{n} W_i$$

(cela est possible, K_{n+1} étant fortement complet, voir [2], th. 2). Posons $K'_{n+1} = \lambda_1 K_1 + \ldots + \lambda_{n+1} K_{n+1}$, c'est une partie faiblement compacte convexe cerclée de E' contenue dans

$$(1/4)\, U + \ldots + (1/2^{n+2})\, U \subset (1/2)\, U\,,$$

on a donc $K'_{n+1} \subset (1/2)\, U_{n+1}$; soit alors W'_{n+1} un voisinage convexe cerclé faiblement fermé de 0 contenu dans $(1/2)\, U_{n+1}$, et posons $W_{n+1} = K'_{n+1} + W'_{n+1}$. C'est un voisinage fort de 0, contenant K'_{n+1} et contenu dans U_{n+1}; de plus il est faiblement fermé, car K'_{n+1} est faiblement compact et W'_{n+1} faiblement fermé. Par suite, λ_{n+1} et W_{n+1} satisfont bien aux hypothèses de récurrence 1), 2) et 3) ci-dessus.

COROLLAIRE 1. *Toute partie séparable et bornée de E'' faible est équicontinue, et à fortiori faiblement relativement compacte.*

Il en résulte aussitôt le

COROLLAIRE 2. *Toute suite de Cauchy faible dans E'' y converge faiblement.*

A fortiori, une suite de Cauchy forte dans E'' converge faiblement, donc aussi fortement; comme E'' est métrisable pour sa topologie forte, il suit:

COROLLAIRE 3. *Le bidual E'' d'un espace localement convexe métrisable est complet, c'est à dire un espace* (F).

COROLLAIRE 4. *Toute partie bornée et séparable du complété $\hat{E}$ de E est contenu dans l'adhérence d'une partie bornée de E.*

En effet, en vertu du corollaire 3, on a $\hat{E} \subset E''$; il suffit alors d'appliquer le corollaire 1. Tous ces énoncés utilisent seulement la forme affaiblie du théorème 1 donnée dans le corollaire 1. La suite de ce N.° donnera des applications du th. 1 sous sa forme générale. Signalons la

PROPOSITION 1. *Soit E un espace localement convexe métrisable, G un espace localement convexe quelconque, (M_i) une suite de parties de l'espace $\mathbf{L}_s(E', G)$ des applications linéaires continues de E' fort dans G, muni de la topologie de la convergence simple. Pour que la réunion M des M_i soit équicontinue, (il faut et) il suffit qu'elle soit bornée, et que chaque M_i soit équicontinu.*

Cela se ramène immédiatement au théorème 1, moins général en apparence, compte tenu du lemme suivant, qui permet de ramener la considération d'applications linéaires continues à la considération de *formes* linéaires:

LEMME 1. *Soient E, G deux espaces localement convexes, M un ensemble d'applications linéaires de E dans G.*

a) *Pour que M soit équicontinu, il faut et il suffit que l'ensemble des transposées u' des $u \in M$* (u' est à priori application linéaire de G' dans le dual *algébrique* de E) *soit tel que pour toute partie équicontinue B' de G', l'ensemble $M'(B')$ des $u'(y')$ (avec $u' \in M'$, $y' \in B'$) soit partie équicontinue de E'.*

b) *Soit $\mathfrak{G}$ un ensemble de parties bornées de E, et supposons les $u \in M$ continues. Pour que M soit borné pour la topologie de la $\mathfrak{G}$-convergence, il faut et il suffit que l'ensemble M' soit tel que pour toute partie équicontinue B' de G', l'ensemble $M(B')$ soit partie bornée de E' quand E' est muni de la topologie de la $\mathfrak{G}$-convergence.*

Nous nous dispensons d'écrire la très immédiate démonstration de ce lemme. Il est évident aussi que ce lemme ramène en effet la proposition 1 au théorème 1. La proposition 1 permet de donner des corollaires analogues, p. ex.:

COROLLAIRE 1. *Toute suite bornée dans $\mathbf{L}_s(E', G)$ est équicontinue (E' étant toujours le dual fort d'un espace métrisable E). Par suite, si une suite (u_i) d'applications linéaires continues de E' dans G converge en chaque point vers une limite $u(x)$, cette suite est équicontinue, et sa limite u est application linéaire* continue *de E' dans G.*

COROLLAIRE 2. *Si G est un espace* (F), $\mathbf{L}(E', G)$ *est complet pour la topologie de la convergence bornée, c'est donc un espace du type* (F).

En effet, comme cet espace est métrisable, pour vérifier qu'il est complet, il suffit de vérifier que toute suite de Cauchy converge.

Avant de nous tourner vers d'autres généralisations du théorème 1, nous allons poser ce théorème en axiome pour une classe remarquable d'espaces, généralisant les duals forts d'espaces métrisables:

DÉFINITION 1. *Un espace localement convexe H est dit du type* (DF), *s'il admet une suite fondamentale de parties bornées, et si toute partie fortement bornée de son dual qui est réunion d'une suite de parties équicontinues, est elle-même équicontinue.*

Le théorème 1 exprime que le dual fort d'un espace localement convexe métrisable est du type (DF); réciproquement, il est im-

médiat de constater que *le dual fort d'un espace du type* (DF) *est métrisable, et complet* (car il suffit de vérifier que les suites de Cauchy dans H' fort convergent), ce qui justifie notre terminologie. Si H est déjà quasi-tonnelé i. e. toute partie fortement bornée de H' est équicontinue, la deuxième condition imposée dans la définition 1 est évidemment superflue. Il en résulte qu'un espace normé, ou une limite inductive d'une suite d'espaces normés, est du type (DF).

La forme duale de la deuxième condition envisagée dans la définition 1 s'énonce ainsi: *Si l'intersection d'une suite de voisinages convexes cerclés et fermés de* 0 *dans* H *absorbe les parties bornées, alors c'est un voisinage de* 0. Nous aurons aussi besoin du

LEMME 2. *Soit* H *un espace du type* (DF). *Alors pour toute suite* (V_i) *de voisinages de* 0, *il existe un voisinage* V *de* 0 *qui est absorbé par chacun des* V_i (voir l'Introduction pour la terminologie).

En effet, transformé par polarité, cet énoncé signifie que pour toute suite (B_i) de parties équicontinues de H', il existe une suite de nombres $\lambda_i > 0$ tels que $\Gamma\, \lambda_i B_i$ soit partie équicontinue de H'. Or, comme H' muni de la topologie forte est métrisable, on peut trouver une suite de nombres $\lambda_i > 0$ tels que $\Gamma\, \lambda_i B_i$ soit borné ("première condition de dénombrabilité de Mackey"), donc aussi équicontinu puisque H est un espace (DF).

Enfin, la proposition 1 et ses corollaires reste manifestement valable si E' y est remplacé par un espace du type (DF) quelconque.

THÉORÈME 2. *Soient* H_1 *et* H_2 *deux espaces du type* (DF), G *un espace localement convexe quelconque,* M *un ensemble d'applications bilinéaires de* $H_1 \times H_2$ *dans* G. *Pour que* M *soit équicontinu, il faut et il suffit que* M *soit équi-hypocontinu* (voir Introduction pour la terminologie).

On peut d'abord se ramener au cas où G est le corps des scalaires, grâce au lemme suivant, qui joue un rôle analogue au lemme 1 et qui se démontre de la même façon:

LEMME 3. *Soient* E, F, G *trois espaces localement convexes,* M *un ensemble d'applications bilinéaires de* $E \times F$ *dans* G. *Pour tout* $u \in M$ *et* $z' \in G'$, *soit* $u_{z'}$ *la forme bilinéaire sur* $E \times F$ *définie par*

$u_{z'}(x, y) = < u(x, y), z' >$, *et pour une partie* C' *quelconque de* G', *soit* $M_{C'}$ *l'ensemble des* $u_{z'}$, *pour* $u \in M$, $z' \in C'$.

a) *Pour que* M *soit équicontinu, il faut et il suffit que pour toute partie équicontinue* C' *de* G', *l'ensemble* $M_{C'}$ *soit un ensemble équicontinu de formes bilinéaires sur* $E \times F$.

b) *Soit* $\mathfrak{G}_1$ *un ensemble de parties bornées de* E, $\mathfrak{G}_2$ *un ensemble de parties bornées de* F. *Pour que* M *soit équi-hypocontinu relativement à* $\mathfrak{G}_1$ *et* $\mathfrak{G}_2$, *il faut et il suffit que pour toute partie équicontinue* C' *de* G', $M_{C'}$ *soit équi-hypocontinu.*

c) *Supposons les* $u \in M$ *séparément continues. Pour que* M *soit borné pour la topologie de la* $\mathfrak{G}_1$ - $\mathfrak{G}_2$ - *convergence dans l'espace* $\mathbf{L}(E, F; G)$ *des applications bilinéaires séparément continues de* $E \times F$ *dans* G, *il faut et il suffit que pour toute partie équicontinue* C' *de* G', $M_{C'}$ *soit un ensemble de formes bilinéaires sur* $E \times F$ *borné pour la* $\mathfrak{G}_1$-$\mathfrak{G}_2$-*convergence.*

Pour démontrer le théorème 2, nous pourrons donc supposer que G est le corps des scalaires. Il suffit manifestement de montrer que si M est un ensemble équi-hypocontinu de formes bilinéaires sur $H_1 \times H_2$, alors M est équi-continu. Soit (A_i) (resp. (B_i)) une suite fondamentale de parties bornées de H_1 (resp. de H_2). Soit, pour tout $u \in M$, u' l'application de H_2 dans H_1' qu'elle définit, et si u parcourt un ensemble A, soit A' l'ensemble des u' correspondants. Nous voulons montrer que M est équicontinu, ce qui signifie aussi qu'il existe un voisinage V de 0 dans H_2 tel que l'ensemble $M'(V)$ des $u'(y)$ ($u' \in M'$, $y \in V$) soit partie *équicontinue* de H_1'. Un raisonnement connu dû à J. Dieudonné et L. Schwartz [3] montre d'abord qu'il existe un voisinage V de 0 dans H tel que $M'(V)$ soit partie *fortement bornée* de H_1': en effet, pour tout A_i, il existe un voisinage fort V_i de 0 dans H_2 tel que l'ensemble des $< x, u'(y) >$ pour $x \in A_i$, $y \in V$, $u' \in M'$ soit borné (cela résulte aussitôt de l'equi-hypocontinuité de M), mais en vertu de la propriété de H_2 exprimée dans le lemme 2, on peut prendre $V_i = V$ indépendant de i, ce qui signifie bien que $M'(V)$ est partie bornée de H'. Prouvons qu' alors $M'(V)$ est même partie *équicontinue de* H_1': on a $M'(V) = \bigcup M'(b_i)$, où $b_i = B_i \cap V$, et les $M'(b_i)$ sont parties *équicon-*

tinues de H_1' (à cause de l'équi-hypocontinuité de M), dont la réunion est bornée. Comme H_1 est du type (**DF**), il suit que cette réunion $M'(V)$ est même équicontinue.

COROLLAIRE. *Si H_1 et H_2 sont deux espaces du type* (**DF**) *tonnelés, alors l'ensemble M d'applications bilinéaires de $H_1 \times H_2$ dans G est équicontinu si et seulement si il est séparément équicontinu* (voir Introduction pour la terminologie).

En effet, on sait que si H_1 et H_2 sont tonnelés, alors il suffit que M soit séparément équicontinu pour être équi-hypocontinu.

REMARQUE 1. En prenant pour M un ensemble réduit à une seule application bilinéaire u, le théorème 2 donne un critère simple pour que u soit continue. Les théorèmes 8 et 9 de [3] en sont des cas particuliers, qui correspondent à deux cas où on peut de façon évidente affirmer qu'une application bilinéaire donnée séparément continue est en fait hypo-continue.

REMARQUE 2. Il suffisait dans la démonstration du théorème 2 de supposer que H_2, au lieu d'être un espace (**DF**), admet seulement une suite fondamentale de parties bornées et satisfait à la condition énoncée dans le lemme 2. D'ailleurs, un tel espace peut effectivement n'être pas un espace du type (**DF**) (de sorte que l'amélioration du th. 2 que nous venons de signaler est effective): en effet, il est immédiat que si H est un espace localement convexe admettant une suite fondamentale de parties bornées, et satisfaisant de plus à la condition envisagée dans le lemme 2, alors tout sous-espace vectoriel de H possède ces mêmes propriétés; cependant, nous verrons qu'un sous-espace vectoriel d'un espace H du type (**DF**) peut ne pas être du type (**DF**), et même que dans le dual de ce sous-espace peuvent exister des suites de Cauchy faibles non faiblement convergentes (voir § II, N° 3).

REMARQUE 3. Le théorème 2 s'étend aux ensembles d'applications *multilinéaires* sur le produit d'un nombre fini quelconque d'espaces H_i du type (**DF**).

REMARQUE 4. Soit E un espace (**F**) non distingué (nous verrons au § II qu'il en existe) et soit A une partie bornée, convexe, cer-

clée, et faiblement fermée de E'' qui ne soit pas équicontinue. Soit H l'espace vectoriel **C**. A engendré par A, muni de la norme définie par la "boule" A. A étant complet, on vérifie facilement que H est complet. L'application identique de H dans E'' peut s'identifier à une forme bilineaire sur $E' \times H$; *cette forme bilinéaire est séparément continue, mais non continue.* On ne peut donc espèrer améliorer de façon essentielle l'énoncé du théorème 2, et la construction précédente résoud par la négative la question 11 dans [3]. En fait, on y demandait que H soit aussi le dual fort d'un espace F du type (F), mais on s'y ramène très facilement de la façon suivante: on sait ([4]) que tout espace de Banach H est isomorphe à un espace quotient de l'espace l^1 (I) des familles de scalaires sommables construit sur un ensemble d'indices suffisamment grand, et d'autre part l^1 (I) est isomorphe au dual de l'espace c_0 (I) des fonctions complexes sur I (considéré comme espace topologique discret) qui "tendent vers zéro à l'infini"; on peut alors remplacer manifestement H par le dual de c_0 (I).

PROPOSITION 3. *Soient H_1, H_2 deux espaces du type* (**DF**), *G un espace localement convexe quelconque. Alors tout ensemble M d'applications bilinéaires de $H_1 \times H_2$ dans G qui est réunion d'une suite d'ensembles équicontinus M_i et est borné pour la topologie de la convergence bornée, est équicontinu.*

Le lemme 3 nous ramène aussitôt au cas où G se réduit aux scalaires. En vertu du théorème 2, il suffit de vérifier que M est équi-hypocontinu, c'est à dire que pour toute partie bornée B de H_2 (par exemple) l'ensemble $M'(B)$ des formes linéaires $x \to u(x,y)$ sur H_1, avec $y \in B$, $u \in M$, est partie équicontinue du dual H_1' de H_1. Mais M étant borné, $M'(B)$ est partie bornée de H_1' fort, et elle est réunion des parties $M'_i(B)$, qui sont équicontinues car les M_i sont équicontinus, d'où la proposition (H étant un espace (**DF**)).

Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer les corollaires de cette proposition, analogues aux corollaires du théorème 1. Bien entendu, la proposition 3 est aussi valable pour un ensemble de fonctions multilinéaires sur le produit d'un nombre fini d'espaces (**DF**).

2. Caractérisation des voisinages forts de l'origine dans un espace (DF). Application à la détermination de certains espaces (F) distingués.

THÉORÈME 3. *Soit H un espace du type* (**DF**) (*définition* 1). *Pour qu'un ensemble convexe U soit voisinage de* 0, (*il faut et*) *il suffit que son intersection avec toute partie bornée convexe cerclée A de H soit voisinage de* 0 *dans A pour la topologie induite par H.*

La condition est évidemment nécessaire. Pour voir qu'elle est suffisante, soit (A_n) une suite fondamentale de parties bornées convexes cerclées fermées de H. Nous allons construire par récurrence une suite (λ_n) de nombres > 0, et une suite (V_n) de voisinages de l'origine, convexes cerclés et fermés, tels que l'on ait

$$(1)\lambda_i A_i \subset (1/3)U \quad (2)\lambda_i A_i \subset V_j \quad (3)V_i \cap A_i \subset U \quad (\text{pour tout } (i, j).$$

Alors $\bigcap_i V_i$ sera un voisinage fort de l'origine en vertu de (2) et de la définition des espaces (**DF**), et contenu dans U en vertu de (3). Pour prouver la possibilité de la récurrence, supposons la faite jusqu'au rang n. Prenons un $\lambda_{n+1} > 0$ tel que l'on ait $\lambda_{n+1} A_{n+1} \subset (1/3)\,U$ — ce qui est loisible, car il existe un voisinage V de l'origine tel que $V \cap A_{n+1} \subset U$ (par hypothèse sur U), il suffit alors de prendre λ_{n+1} tel qu'on ait $3\,\lambda_{n+1} \leq 1$, $3\,\lambda_{n+1}\, A_{n+1} \subset V$. En prenant λ_{n+1} assez petit, on peut supposer de plus que $\lambda_{n+1} A_{n+1} \subset V_i$ pour $i = 1, \ldots, n$. Montrons qu'on peut trouver alors un voisinage convexe cerclé fermé V_{n+1} de 0 tel que l'on ait $\lambda_i A_i \subset V_{n+1}$ pour $i = 1, \ldots, n+1$, et $V_{n+1} \cap A_{n+1} \subset U$, ce qui démontrera la possibilité de la récurrence. Posons $A = \Gamma_{i=1}^{n+1} \lambda_i A_i$, nous prendrons $V_{n+1} = \overline{A + V}$, où V est un voisinage convexe cerclé de zéro à déterminer. Comme on a $A \subset V_{n+1} \subset 2\,(A+V) = 2A + 2V$ il suffit qu'on ait $(2A + 2V) \cap A_{n+1} \subset U$. Cela s'écrit aussi, en posant $B = A_{n+1} \cap \complement U$, $(2A + 2V) \cap B = \varnothing$ ou enfin $2V \cap \cap (B + 2A) = \varnothing$ (noter que A étant convexe cerclé, on a $-A = A$). L'existence d'un tel voisinage V signifie donc que l'origine n'est pas adhérente à l'ensemble $C = B + 2A$. Or on a $C \subset \subset \complement\,(1/3)\,U$, car sinon il existerait un point de $(1/3)\,U$ dans $B + 2A$ donc un point de $(1/3)\,U + 2A$ dans B, mais $A \subset (1/3)\,U$

en vertu de (1), d'où $(1/3)\ U+2A \subset (1/3)\ U + (2/3)\ U \subset U$ (U étant convexe), et d'autre part $B \subset \complement\ U$. On a donc bien $C \subset \complement\ (1/3)\ U$, soit $3\ C \subseteq \complement\ U$. Comme de plus C est borné, donc contenu dans un ensemble borné convexe cerclé fermé, il résulte bien de l'hypothèse sur U que l'origine n'est pas adhérente à $3\ C$, ni donc à C, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE 1. *Soit H un espace* (DF), *G un espace localement convexe quelconque. Pour qu'une application linéaire u de H dans G soit continue, il faut et il suffit que ses restrictions aux parties bornées de H le soient. Pour qu'un ensemble M d'applications linéaires de H dans G soit équicontinu, il faut et il suffit que pour tout borné $A \subset H$, l'ensemble des restrictions à A des $u \in M$ soit équicontinu.*

En effet, on vérifie immédiatement que si A est une partie convexe cerclée quelconque de H, dire que l'ensemble des restrictions à A des $u \in M$ est équicontinu, signifie aussi que pour tout voisinage V de l'origine dans G, l'ensemble $U = \bigcap u^{-1}(V)$, $u \in M$, induit A un voisinage de l'origine; en prenant pour A successivement H, ou une partie bornée arbitraire de H, et en appliquant le théorème 3, le corollaire apparait. Il est d'ailleurs facile de se convaincre que dans un espace localement convexe quelconque H, la validité du théorème 3 ou de son corollaire sont strictement *équivalents*. De plus, ils entrainent le corollaire suivant, (généralisant le cor. 2 de la prop. 1):

COROLLAIRE 2. *Soit H un espace* (DF), *G un espace localement convexe séparé complet. Alors l'espace* **L** *(H, G) des applications linéaires continues de H dans G, muni de la topologie de la convergence bornée, est complet.*

La vérification à partir du corollaire 1 est "straight-forward". Le corollaire 1 du théorème 3 semble pouvoir être utile aussi pour l'application du théorème 2, qui ramène la preuve de la continuité d'une application bilinéaire à celle de l'équicontinuité de certains ensembles d'applications linéaires de H_1 ou H_2 dans un espace localement convexe. Mais signalons qu'il n'est *pas* exact que, pour qu'une forme bilinéaire sur $H_1 \times H_2$ soit continue (H_1 et H_2, espaces (DF)), il soit suffisant que ses restrictions aux produits

$A \times B$ de deux parties bornées quelconques de H_1 resp. H_2 le soient: la construction de la remarque 4 (après le th. 2) donne en effet un contre exemple, l'un des espaces H_1, H_2 impliqués étant même un espace de Banach.

Dans le cas où H est le dual fort d'un espace localement convexe métrisable, le théorème 3 équivaut, par polarité, à l'énoncé suivant (dont nous n'aurons pas à nous servir par la suite): *pour qu'une partie A de E'' soit équicontinue, (il faut et) il suffit que pour tout voisinage V de 0 dans E, existe une partie bornée B de E telle que A soit contenue dans l'adhérence faible de $B + V$ dans E''.*

Remarque 5. Le théorème 3 pourrait faire croire que, de façon analogue à ce qui se passe pour la topologie de la convergence compacte dans le dual d'un espace (**F**) ([3], théorème 5), la topologie d'un espace H du type (**DF**) soit la plus fine de toutes les topologies sur H qui induisent sur les parties bornées de H la même topologie que H; et que par suite toute partie M de H dont l'intersection avec toute partie bornée et fermée est fermeé, soit fermée. Nous verrons pourtant qu'il n'en est rien, même si M est un sous-espace vectoriel de H, H étant un dual fort d'espace (**F**) (§ 2, N.° 3).

Théorème 4. *Soit H un espace du type* (**DF**), *M une partie de H contenant une suite partout dense. Soit T_0 la topologie sur H de la convergence uniforme dans les parties fortement bornées du dual de H. Alors T_0 induit sur M la topologie de H.*

On peut évidemment supposer que M est un sous-espace *vectoriel* de H. Comme à priori la topologie induite par T_0 est plus forte, il suffit de montrer que pour tout ensemble U convexe cerclé et fermé de H qui absorbe les parties bornées de H, existe un voisinage V de 0 dans H tel que $V \cap M \subset U$, soit $V \cap \complement U \cap M = \emptyset$. Si V est ouvert, il suffit pour cela que aucun des x_i d'une suite partout dense dans M ne soit dans $V \cap \complement U$ (puisque cet ensemble est ouvert); on est donc ramené à montrer que pour toute suite (x_i) dans $\complement U$, il existe un voisinage V de 0 dans H ne contenant aucun des x_i. Pour cela, (A_n) étant une suite fondamentale de parties bornées de H, on construit par récurrence simultanée une

suite de voisinages convexes cerclés et fermés V_n de 0 et une suite de nombres $\lambda_n > 0$, de telle façon qu'on ait:

(1) $\lambda_i A_i \subset V_j$ (2) $\lambda_i A_i \subset U$ (3) $x_i \in \complement V_i$ (pour tout (i, j)).

La possibilité de la récurrence se voit très facilement, on est ramené à trouver, étant donné un ensemble convexe cerclé fermé $A = \overline{\Gamma}_1^n \lambda_i A_i$, un voisinage convexe cerclé fermé V_{n+1} de l'origine contenant A et non x_{n+1}, ce qui est possible puisque $x_{n+1} \in \complement A$. On pose alors $V = \bigcap_i V_i$, V est intersection d'une suite de voisinages convexes cerclés fermés de l'origine et absorbe les parties bornées en vertu de (1), c'est donc un voisinage de l'origine puisque H est un espace (DF), et V ne contient aucun des x_i en vertu de (3).

COROLLAIRE 1. *La topologie T_0 donne les mêmes suites convergentes et les mêmes suites faiblement convergentes que la topologie donnée de H, et induit sur les parties métrisables de H la même topologie que H.*

Les deux premières affirmations sont en effet impliquées immédiatement dans le théorème 4, et la dernière affirmation est conséquence de la première. Notons que celle-ci implique aussi que pour une application d'un espace topologique *métrisable* dans H, il revient au même de dire qu'elle est continue pour la topologie donnée de H ou pour T_0.

COROLLAIRE 2. *Un espace* (DF) *qui admet une suite partout dense est quasi-tonnelé.*

La conjonction du théorème 3 et du théorème 4 donne le

THÉORÈME 5. *Un espace* (DF) *dont les parties bornées sont métrisables est quasi-tonnelé.*

En effet, en vertu du théorème 3, il suffit de montrer que T_0 induit sur les parties bornées de H la topologie de H, ce qui résulte du corollaire 1 du théorème 4.

Le théorème 5 donne un critère commode pour décider si un espace (DF) est quasi-tonnelé. Si E est un espace (F), E est distingué si et seulement si son dual fort est tonnelé (ce qui équivaut ici à quasi-tonnelé), d'où un critère suffisant pour que E soit dis-

tingué: il suffit que les parties bornées de son dual fort soient métrisables. Il semble que les espaces du type (F) qu'on rencontre en Analyse tombent tous sous ce critère, car ils rentrent même dans la catégorie plus restreinte des espaces (F) "quasi-normables" du § 3.

3. La topologie tonnelée associée à un dual d'espace (F) et théorèmes de dualité

LEMME 4. *Soit H un espace* (**DF**), *(A_i) une suite croissante de parties bornées, convexes, cerclées et fermées de H, telle que toute partie bornée de H soit absorbée par l'un des A_i. Soit U la réunion des A_i. Alors l'adhérence forte $\overline{U}$ de U est identique à son adhérence "algébrique" $\tilde{U}$* (i. e. l'ensemble des $x \in H$ tels que $\lambda x \in U$ pour tout $0 < \lambda < 1$).

On a évidemment $\tilde{U} \subset \overline{U}$; pour montrer que $\overline{U} \subset \tilde{U}$, il suffit de montrer que pour tout $x \in \complement \tilde{U}$, il existe une forme $x' \in U^\circ$ (polaire de U dans H') telle que $|<x, x'>| > 1$. Soit donc $\lambda > 1$ tel que $x \in \complement \lambda U$, on va trouver $x' \in U^\circ$ avec $<x, x'> = \lambda$. En effet, pour tout n, il existe, en vertu de $x \in \complement \lambda A_n$, une $x'_n \in (A_n)^\circ$ telle que $<x, x'_n> = \lambda$. La suite des $x'_n \in H'$ est évidemment fortement bornée, donc équicontinue puisque H est du type (**DF**). Elle admet donc une valeur d'adhérence faible x', et il est immédiat que $x' \in U^\circ$, $<x, x'> = \lambda$, cqfd.

COROLLAIRE. *Soit $E' = H$ le dual fort d'un espace localement convexe métrisable E, soit (K_i) une suite fondamentale de parties bornées, convexes, cerclées et faiblement fermées de E', (λ_i) une suite de nombres > 0; posons $U = \Gamma \lambda_i K_i$. Alors l'adhérence forte de U est égale a son adhérence "algébrique".*

En effet, les K_i étant faiblement compacts, les ensembles $A_n = \Gamma_{i=1}^n \lambda_i K_i$ sont faiblement compacts, donc fortement fermés; comme $U = \bigcup A_n$, on peut donc appliquer le lemme 4.

Le corollaire donne immédiatement le

THÉORÈME 6. *Soit $H = E'$ le dual fort d'un espace localement convexe métrisable E. Alors toute partie convexe cerclée V de H absorbant les parties bornées, contient une partie convexe cerclée fermée absorbant les parties bornées.*

En effet, (1/2) V contient un ensemble U de la forme $\Gamma\, \lambda_i K_i$, dont l'adhérence forte est identique à son adhérence "algébrique' (corollaire du lemme 4) donc contenue dans V.

COROLLAIRE 1. *Soit H_0 l'espace H muni de la topologie T_0 de la convergence uniforme sur les parties bornées de $H' = E''$. H_0 a les mêmes parties bornées que H, et est un espace* (**DF**) *complet, bornologique et par suite tonnelé. Son dual est l'espace H^* des formes linéaires sur H qui sont bornées sur toute partie bornée de H.*

Il est trivial que H_0 a les mêmes parties bornées que H. Comme H est complet, que la topologie T_0 de H_0 est définie comme topologie de la convergence uniforme sur un ensemble de parties bornées de H' et est plus fine que celle de H, H_0 est complet. Le fait que H_0 est bornologique n'est autre que le théorème 6 (car les parties de H convexes, cerclées, fermées et absorbant les parties bornées forment un système fondamental de voisinages de 0 pour T_0); il est donc aussi tonnelé puisqu'il est complet. En particulier, il en résulte que les formes linéaires continues sur H_0 sont les formes linéaires qui sont bornées sur les parties bornées de H_0. Enfin, H_0 étant tonnelé et ayant une suite fondamentale de parties bornées, est un espace du type (**DF**).

COROLLAIRE 2. *Toute partie A faiblement bornée de l'espace H^* des formes linéaires sur H bornées sur les parties bornées, est contenue dans l'adhérence faible d'une partie bornée de H'.*

Un cas particulier important du théorème 6 est le

THÉORÈME 7. *Soit E un espace localement convexe métrisable Les trois conditions suivantes sont équivalentes:*

a) *E est distingué;*

b) *Le dual fort $E' = H$ est tonnelé;*

c) *H est bornologique.*

L'équivalence de *a*) et *b*) est très générale (voir Introduction); alors la topologie de H est aussi celle de la convergence uniforme sur les parties bornées de H', et il en résulte (corollaire 1 du th. 6) que H est même bornologique. Réciproquement, H étant complet, H bornologique implique H tonnelé.

REMARQUE 6. J'ignore si le théorème 6 et ses corollaires, et le théorème 7, sont valables pour tous les espaces (DF). La difficulté vient de ce que le corollaire du lemme 4 ne se laisse peut-être pas généraliser à tous les espaces (DF), car on ne peut plus invoquer une raison de compacité pour affirmer que les $\Gamma_{i=1}^{n} \lambda_i K_i$ sont des parties *fermées* de H.

REMARQUE 7. Il ne semble pas qu'on connaisse un espace localement convexe H et une forme linéaire sur H, bornée sur les parties bornées de H, qui ne soit faiblement adhérente dans le dual algébrique de H à une partie fortement bornée de H'; ni à fortiori un espace quasi-tonnelé qui ne soit bornologique.

REMARQUE 8. Si E est un espace localement convexe métrisable, H son dual fort, alors il est équivalent de dire que toute forme linéaire sur H qui est bornée sur les parties bornées est continue, ou que les parties bornées de H' sont faiblement relativement compactes. En effet, la première de ces conditions implique la seconde quel que soit l'espace localement convexe H, comme il résulte facilement du "théorème des bipolaires", et la deuxième implique la première en vertu du corollaire 2 du théorème 6. Il *suffit*, pour qu'il en soit ainsi, que H soit bornologique (c'est à dire E distingué — théorème 7 —). La réciproque n'est pas certaine, car j'ignore si toute partie faiblement relativement compacte, convexe, cerclée de H' est équicontinue, en d'autres termes si la topologie de H est forcément la topologie de Mackey $\tau(H, H')$. Si oui, ce serait d'ailleurs spécial aux espaces (DF) qui sont des duals forts d'espaces métrisables, car il est facile de donner des exemples d'espaces H du type (DF) dont la topologie n'est pas $\tau(H, H')$. Par exemple, il suffit, sur un espace de Banach réflexif non séparable, de considérer la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées et séparables de son dual.

REMARQUE 9. Le corollaire 2 du théorème 6, joint au fait que toute partie bornée de H' est relativement semi-compacte (i. e. toute suite extraite de cette partie admet une valeur d'adhérence faible dans H') permet de conclure que pour toute forme linéaire sur H bornée sur les parties bornées, les restrictions aux parties convexes, cerclées et $\sigma(H, H')$ – compactes de H sont continues, comme il résulte d'un théorème de topologie générale (voir [6], th. 1). Il est évident d'autre part que réciproquement, toute forme linéaire sur H dont les restrictions aux parties convexes cerclées $\sigma(H, H')$ – compactes sont continues, est bornée sur les parties bornées, car on sait que dans le cas contraire, il existerait une suite tendant même fortement vers zéro sur laquelle cette forme ne resterait pas bornée. Mais d'autre part, il résulte d'un théorème général (voir [7]) que le complété de H' pour la topologie $\tau(H', H)$ s'identifie précisément à l'espace des formes linéaires sur H dont les restrictions aux parties convexes, cerclées et $\sigma(H, H')$ – compactes de H sont continues. Ainsi, l'espace H^* des formes linéaires sur H bornées sur les parties bornées, dont une caractérisation intéressante a déjà été donnée au corollaire 1 du théorème 6, s'identifie aussi au complété de H' pour la topologie $\tau(H', H)$. En particulier, H^* est identique à H' si et seulement si H' est complet pour la topologie $\tau(H', H)$. D'ailleurs, il est immédiat que dans tout ceci, la topologie $\tau(H', H)$ peut aussi être remplacée par exemple par la topologie sur H' de la convergence *compacte* dans H.

Nous allons utiliser le théorème 7 pour étendre sous certaines conditions le théorème usuel qui donne le dual d'un sous-espace vectoriel. Notons d'abord la proposition générale qui suit:

PROPOSITION 4. *Soit E un espace localement convexe, F un sous-espace vectoriel. Si F est quasi-tonnelé et son dual fort bornologique, alors sur E'/F°, la topologie quotient de la topologie forte de E' est identique à la topologie forte du dual de F. Réciproquement, pourvu que le dual fort de E soit bornologique, si les deux topologies fortes envisagées sur E'/F° sont identiques, alors F' fort est bornologique.*

La deuxième partie de la proposition résulte de ce qu'un espace quotient d'un espace bornologique est bornologique. Pour la pre-

mière partie, il suffit de montrer que la topologie T_d de dual fort est plus fine que la topologie quotient, ou aussi, T_d étant bornologique, que toute partie A de E'/F° qui est bornée pour la topologie T_d est bornée pour la topologie quotient. Mais F étant quasi-tonnelé, A sera une partie équicontinue du dual de F, donc, en vertu du théorème de Hahn-Banach, image canonique d'une partie équicontinue de E', donc bornée pour la topologie quotient de E' fort.

Compte tenu du théorème 7, nous obtenons alors le

THÉORÈME 8. *Soit E un espace localement convexe quelconque, F un sous-espace vectoriel qui est métrisable et distingué. Alors le dual fort de F s'identifie a E'/F° muni de la topologie quotient de E' fort.*

D'ailleurs, la dernière partie de la proposition 4, et le fait que tout espace F du type (F) est isomorphe à un sous-espace vectoriel d'un espace E qui est un produit topologique d'espaces de Banach (et dont le dual par suite est bornologique) nous montre que *le théorème* 8 *peut être en défaut en prenant pour F un espace* (F) *non distingué* (voir § 2, N.° 1).

REMARQUE 10. J'ignore si dans la proposition 4, l'hypothèse que F soit quasi-tonnelé est superflue. Cela est lié à la question suivante: F étant un sous-espace vectoriel fermé de l'espace localement convexe E, les deux topologies fortes sur E'/F° donnent-elles les mêmes parties bornées? La proposition 5 donnera d'ailleurs un autre cas où le théorème de dualité envisagé ici est valable.

4. Compléments divers sur les espaces du type (DF)

PROPOSITION 5. *Soit E un espace localement convexe, F un sous-espace vectoriel.*

a) *Supposons F du type* (DF). *Alors les deux topologies fortes sur E'/F° sont identiques* (*et en font un espace* (F)).

b) *Si E est du type* (DF), *F fermé, alors E/F est aussi du type* (DF) *et les deux topologies fortes sur F°* (topologie induite par E' fort et topologie forte du dual de E/F) *sont identiques.*

Démonstration. a) La topologie T_d de dual fort sur E'/F° est une topologie d'espace (F). Pour montrer que l'application

identique de cet espace sur l'espace quotient de E' fort par F° est continue, il suffit donc de vérifier que toute suite qui converge vers zéro dans le dual fort de F, est bornée pour la topologie quotient. Mais F étant du type (**DF**), une suite bornée dans F' fort est équicontinue, donc image canonique d'une partie équicontinue de E' ([5]), donc à fortiori bornée pour la topologie quotient.

b) Pour montrer que les deux topologies fortes sur F° sont identiques, il suffit évidemment de montrer que l'application identique de F°, muni de la topologie T_i induite par E' fort, dans le dual fort de E/F, est continue. Comme E', donc son sous-espace F°, est du type (**F**), il suffit comme plus haut de montrer que toute suite dans F° qui converge vers zéro pour T_i, est bornée pour la topologie de dual fort. Or, cette suite est encore bornée, donc équicontinue *dans* E' (E étant un espace (**DF**)),donc équicontinue dans le dual fort de E/F, et à fortiori bornée dans ce dual. Les deux topologies fortes sur F° sont donc bien identiques, ou, ce qui revient au même, toute partie bornée de E/F est contenue dans l'adhérence de l'image canonique d'une partie bornée de E. Il en résulte aussitôt que E/F admet un système fondamental dénombrable de parties bornées. Pour vérifier que E/F est du type (**DF**), il suffit donc de vérifier que toute partie bornée de son dual qui est réunion d'une suite de parties équicontinues est équicontinue. Mais cela est trivial compte tenu du fait que E satisfait à cette condition.

COROLLAIRE 1. *Soit E un espace localement convexe, F un sous-espace vectoriel du type* (**DF**), *A une partie bornée de l'adhérence de F dans E. Alors il existe une partie bornée B de F dont l'adhérence contienne A.*

En effet, on peut évidemment supposer que E est le complété de F, et alors notre assertion équivaut au fait que sur le dual commun de E et F, les deux topologies fortes coincident. En particulier:

COROLLAIRE 2. *Pour qu'un espace F du type* (**DF**) *soit complet, il faut et il suffit que ses parties bornées et fermées soient complètes.*

Notons aussi le

COROLLAIRE 3. *Soit F un espace du type* (**DF**). *Pour que F soit quasi-tonnelé, il faut et il suffit que son complété soit tonnelé.*

La necessité est évidente sans aucune hypothèse sur F, la suffisance résulte aussitôt du corollaire 1.

Remarquons que contrairement à ce qu'on vient de démontrer pour les espaces quotients, un sous-espace vectoriel fermé d'un espace du type (**DF**) peut ne pas être du type (**DF**) (N° 1, Remarque 2). Par contre on vérifie trivialement qu'un produit d'un nombre fini d'espaces (**DF**) est un espace (**DF**), et qu'une limite inductive stricte d'une suite d'espaces du type (**DF**) est encore du type (**DF**). On peut montrer qu'il en est encore ainsi pour le produit tensoriel topologique large (voir [5]) de deux espaces du type (**DF**). Le bidual d'un espace H du type (**DF**), muni de la topologie forte du dual de H' fort, est du type (**DF**), puisque H' est un espace (**F**) (voir théorème 1); j'ignore si, pour la "topologie naturelle" définie dans l'Introduction, H'' est encore du type (**DF**) (la question ne se pose pas si H est tonnelé, car alors les deux topologies envisagées sur H'' sont identiques). — Enfin, le résultat suivant, qui généralise la partie b) de la proposition 5, mérite une mention spéciale, car il est tout à fait exceptionnel parmi les limites inductives *généralisées* d'espaces (**F**), (où en effet la principale difficulté tient à ce que les parties bornées sont mal connues).

THÉORÈME 9. *Soit E un espace vectoriel, (E_i) une suite d'espaces du type* (**DF**), *(u_i) une suite d'applications linéaires des E_i dans E, telle que l'espace vectoriel engendré par les images $u_i(E_i)$ soit E. Alors E, muni de la topologie localement convexe la plus fine qui rende continues les applications u_i, est un espace du type* (**DF**), *et la topologie forte de son dual est aussi la topologie de la convergence uniforme sur les parties de E du type $u_i(B_i)$, où B_i est une partie bornée de E_i. Toute partie bornée de E est contenue dans l'enveloppe convexe cerclée fermée d'un nombre fini de tels ensembles $u_i(B_i)$.*

La dernière de ces assertions est évidemment équivalente à celle qui la précédait. Pour faire la démonstration, on peut répéter à peu près exactement les raisonnements de la proposition 5b). On peut aussi se ramener à la proposition 5b) et au cas, déjà signalé

(mais à vrai dire à peine moins simple) d'une limite inductive stricte, en notant que E s'identifie aussi à l'espace quotient de l'espace H, somme directe topologique des espaces E_i, par le sous-espace noyau de l'application linéaire naturelle $(x_i) \to \Sigma_i u_i(x_i)$ de H sur E.

COROLLAIRE. *Si les E_i sont des espaces* (**DF**) *réflexifs et E séparé, alors E est un espace* (**DF**) *réflexif.*

En effet, les parties bornées de E sont contenues chacune dans l'enveloppe convexe cerclée fermée d'un nombre fini d'ensemles $u_i(B_i)$, que l'on peut supposer eux-mêmes convexes et faiblement compacts (en prenant les B_i tels), de sorte que cette enveloppe est faiblement compacte.

E est dit limite inductive (généralisée) de la suite des espaces E_i, pour les applications u_i. — Le théorème 9 s'applique en particulier aux limites inductives généralisées d'une suite d'espaces normés (espaces assez fréquents comme il semble, voir exemples plus bas), mais on notera que le corollaire est en défaut pour les limites inductives généralisées d'une suite d'espaces (**F**) réflexifs: nous construirons en effet, au § 2, N.° 2, un espace quotient d'un espace (**LF**) réflexif (et même du type (**M**)) qui n'est pas réflexif. Signalons encore le fait souvent commode, et d'ailleurs trivial, suivant: *Une limite inductive (généralisée !) d'une suite d'espaces localement convexes tonnelés (resp. quasi-tonnélés, resp. bornologiques) est tonnelé (resp. quasi-tonnelé, resp. bornologique).*

La fin de ce N.° sera consacré à quelques exemples types d'espaces (**DF**).

a) Les espaces $(\mathbf{E}'^m)$, $(\mathbf{E}')$ $(\mathbf{D}_{L_p}'^{(m)})$, $(\mathbf{D}_{L_p}')$ définis par L. SCHWARTZ dans [12], tome 2, p. 165 sont des espaces du type (**DF**), car ils sont définis comme duals forts d'espaces (**F**). On verra au § 3, comme application des théorèmes 5 et 7, que tous ces espaces (**DF**) sont tonnelés et bornologiques. De même l'espace (**C**) des fonctions continues à support compact défini dans loc. cit. est un espace (**DF**) tonnelé et bornologique, car c'est une limite inductive stricte d'une suite d'espaces de Banach.

b) *Espaces de fonctions localement holomorphes.* Soit V une variété analytique complexe, K une partie compacte de V; soit $\mathbf{H}(K)$ l'espace des classes de fonctions holomorphes f définies au voisinage de K, deux telles fonctions étant identifiées si et seulement si elles coincident dans un voisinage de K ("fonctions localement holomorphes sur K"). Pour tout voisinage compact F de K, soit $J(F)$ l'espace des fonctions continues sur F qui sont holomorphes à l'intérieur de F, muni de la topologie de la convergence uniforme (qui en fait donc un espace de Banach), et soit φ_F l'application naturelle de $J(F)$ dans $\mathbf{H}(K)$. Nous munirons $\mathbf{H}(K)$ de la topologie localement convexe la plus fine qui rende continues les applications φ_F; cette topologie ne change évidemment pas si on fait parcourir à F seulement un système fondamental de voisinages de K, par exemple une *suite* fondamentale de voisinages. Il suit alors du théorème 9 que $\mathbf{H}(K)$ est un espace du type (**DF**). Il est d'ailleurs facile de voir que cet espace est séparé, car sa topologie est plus fine que la topologie "de la convergence uniforme, sur K, de f et de toutes ses dérivées successives" (topologie dont la définition correcte serait évidente). De plus, si F_1 et F_2 sont deux voisinages compacts de K tels que F_2 soit contenu dans l'intérieur de F_1, et si on désigne par φ_{F_1, F_2} l'application naturelle de $J(F_1)$ dans $J(F_2)$, il suit aussitôt du classique théorème de Montel que l'image par φ_{F_1, F_2} de la boule unité B_{F1} de $J(F_1)$ est relativement compacte dans $J(F_2)$. Comme $\varphi_{F_1} = \varphi_{F_2} \circ \varphi_{F_1, F_2}$ il en résulte que $\varphi_{F_1}(B_{F_1})$ est une partie relativement compacte de $\mathbf{H}(K)$, d'où (théorème 9) que toute partie bornée de $\mathbf{H}(K)$ est relativement compacte, $\mathbf{H}(K)$ *est un espace* (**M**) (voir Introduction pour la terminologie). D'ailleurs, $\mathbf{H}(K)$ *est tonnelé* comme limite inductive d'une suite d'espaces tonnelés, donc il est *complètement réflexif* et son dual fort est un espace (**F**) qui est aussi du type (**M**); par suite, $\mathbf{H}(K)$ est le dual fort d'un espace E du type (**F**) et du type (**M**). — Signalons qu'il n'est pas difficile de déduire aussi du théorème de Montel que E est même un "espace de Schwartz" (voir définition 5 du § 3) ce qui implique que *tous les sous-espaces vectoriels fermés de* $E' = \mathbf{H}(K)$ *sont aussi des espaces* (**DF**) *tonnelés*

du type (**M**), *duals d'espaces de Schwartz* (§ 3, th. 11). En fait, ce sont même des espaces "nucléaires" (voir [5] et [8], § 7).

Si K est une partie compacte de $\mathbf{R}^n$, alors l'espace des classes de fonctions analytiques *de variable réelle* définies au voisinage de K, s'identifie à l'espace $\mathbf{H}(K)$ des classes de fonctions analytiques de *variable complexe* définies au voisinage de K dans $\mathbf{C}^n$. Il est alors indiqué de le munir de la topologie de $\mathbf{H}(K)$ définie ci-dessus, qui en fait donc un espace (**DF**) tonnelé et du type (**M**).

Les espaces $\mathbf{H}(K)$, lorsque K est une partie de la sphère de Riemann, ont été étudiés de façon détaillée par M. G. Köthe et moi-même, ainsi que des espaces fonctionnels analogues et plus généraux ([11] et [8]).

c) De nombreux espaces fonctionnels, définis en imposant à ses éléments d'appartenir à l'un au moins des espaces d'une suite d'espaces normés (ces conditions étant par exemple des "conditions de croissance à l'infini") sont des espaces (**DF**) de façon naturelle. Par exemple l'espace H des fonctions analytiques entières de type exponentiel, dont les éléments sont les fonctions entières qui sont majorées en module par un multiple de l'une au moins des fonctions de comparaisons φ_k, $\varphi_k(z) = \exp k|z|$, sera muni de la topologie localement convexe la plus fine qui rende continues les applications naturelles dans H des espaces de Banach H_k suivants: H_k est l'espace formé des fonctions entières telles que $\sup |f(z)/\varphi_k(z)| = M_k(f) < +\infty$, muni de la norme $f \to M_k(f)$. Un raisonnement analogue à celui employé pour l'exemple b) montrerait d'ailleurs que H est tonnelé et du type (**M**), donc le dual fort d'un espace (**M**) métrisable et complet. Mais on peut aussi remarquer que H est vectoriellement isomorphe à l'espace $\mathbf{H}(\{0\})$ des fonctions holomorphes locales au voisinage de l'origine, en faisant correspondre à la suite (a_n) des coéfficients de Taylor de $f \in H$ (majorée en module par un multiple d'une suite de la forme $1, k/1!, k^2/2!, \ldots$) la suite $(b_n) = (n!\, a_n)$, considérée comme suite des coéfficients de Taylor d'une fonction $\tilde{f}$ définie au voisinage de l'origine (cet isomorphisme est d'ailleurs bien connu). Il n'est pas difficile alors de voir que la topologie que nous venons de définir sur H est identique à celle définie dans b) pour l'espace $\mathbf{H}(K)$

avec $K = \{0\}$ (Cet espace peut d'ailleurs être considéré comme le dual de l'espace de *toutes* les fonctions entières $g(z) = \Sigma c_n z^n$, muni de la topologie de la convergence compacte, à l'aide de la forme bilinéaire $<(b_n), (c_n)> = \Sigma b_n c_n$; voir par exemple [11] et [8] pour plus de détails et de généralité).

Un autre exemple analogue au précédent mais qui ne se ramène plus à l'exemple b), est l'espace des fonctions entières d'ordre fini, i.e. l'espace des fonctions entières f qui sont majorées en module par un multiple d'au moins une des fonctions de comparaison ψ_k, $\psi_k(z) = \exp |z|^k$ avec la topologie limite inductive naturelle. Le lecteur pourra se convaincre facilement que c'est encore un espace (**DF**) tonnelé et du type (**M**). On peut même montrer encore que c'est le dual d'un espace de Schwartz (définition au § 3) et même d'un espace "nucléaire" ([5]).

Autres exemples analogues: Espace des fonctions continues sur $\mathbf{R}^n$ qui sont à croissance lente, i.e. majorés en module par un polynôme; espace des fonctions f localement sommables sur $\mathbf{R}^n$ (ou des mesures sur $\mathbf{R}^n$) qui sont "à croissance lente en mesure", i.e. telles que $\lambda(r) = \int_{|x| \leq r} |f(x)| dx$ soit fonction de r majorée par un polynôme; plus généralement, espace des fonctions localement dans L^p qui sont "à croissance lente au sens de L^p", ce qui signifie: majorées en module par le produit d'un polynôme et d'une fonction de L^p. Tous ces espaces sont encore tonnelées et bornologiques comme limites inductives d'espaces normés, mais ils ne sont pas réflexifs, sauf dans le dernier exemple pour $p \neq 1$ et $p \neq \infty$.

d) *Espaces d'applications linéaires.* Il y a lieu d'espérer que, du moins sous des conditions assez générales, l'espace $\mathbf{L}(E, H)$ des applications linéaires continues d'un espace E du type (**F**) dans un espace H du type (**DF**) soit du type (**DF**) pour la topologie de la convergence bornée. De toutes façons, il est bien connu que dès que E est métrisable et que H admet une suite fondamentale de parties bornées (i. e. H' fort est métrisable) alors pour toute partie bornée M de l'espace $\mathbf{L}(E, H)$ il existe un voisinage U de 0 dans E et une partie bornée A de H, tels que $u(U) \subset A$ pour tout $u \in M$ (pour cela on regarde les u comme des formes bilinéaires sur $E \times H'$,

et on est ramené à un théorème classique), ce qui implique que sous ces conditions, $\mathbf{L}(E, H)$ admet une suite fondamentale de parties bornées. On peut alors considérer sur $\mathbf{L}(E, H)$ la topologie bornologique associée à la famille de ces ensembles bornés, i. e. la topologie dont un système fondamental de voisinages de $\mathbf{0}$ est formé par les ensembles convexes cerclés qui absorbent les parties bornées. Cette topologie, à priori plus fine que la topologie de la convergence bornée, fait alors de $\mathbf{L}(E, H)$ un espace (**DF**) bornologique. Malheureusement, il n'est pas certain, même si H est un espace bornologique (et à fortiori un espace du type (**DF**) que les deux topologies précédentes sur $\mathbf{L}(E, H)$ coincident; je l'ignore même dans le cas où E ou H serait un espace de Banach et ne connais de résultat positif que sous des conditions beaucoup trop restrictives (E ou H étant un espace "nucléaire").

Un cas particulier du problème: "$\mathbf{L}(E, H)$ est-il du type (**DF**) pour la topologie de la convergence bornée quand E est du type (**F**) et H du type (**DF**)?" est le suivant: l'espace des formes bilinéaires continues sur le produit de deux espaces E et F du type (**F**), muni de la topologie de la convergence uniforme sur les produits de deux parties bornées, est-il du type (**DF**) (i.e. le théorème 1 se généralise-t-il au cas des espaces de formes bilinéaires)? Sous cette forme, nous rencontrerons encore cette question dans des articles ultérieurs.

5. Application aux espaces (LF)

Dans ce N.°, nous généralisons aux espaces (**LF**) de J. Dieudonné et L. Schwartz certains résultats des N.°s précédents. Un article ultérieur donnera quelques résultats sur les limites inductives plus générales d'espaces (**F**), avec des applications à divers espaces fonctionnels introduits par L. Schwartz. Il est certain que les limites inductives généralisées sont bien plus fréquentes en pratique que les limites inductives initialement considérées par ces auteurs; nous réservons à ces dernières le terme de *limites inductives strictes*, étant entendu pourtant que l'on n'assujettit pas les espaces E_n (formant une suite croissante de sous-espaces vectoriels de E, munis de topologies localement convexes compatibles, E_n

étant fermé dans E_{n+1}) à être des espaces (**F**). Alors E_n est encore fermé dans E et sa topologie propre identique à la topologie induite par E, et une partie bornée de E est contenue dans un des espaces E_n (démonstrations identiques à celles de [3]). Nous conservons le nom d'espace (**LF**) aux limites inductives strictes d'une suite d'espaces du type (**F**).

Soit E une limite inductive stricte d'une suite croissante d'espaces localement convexes E_n. L'application identique φ_n de E_n dans E étant un isomorphisme dans, l'application bitransposée φ_n'' est un isomorphisme de E_n'' dans E'' pour les topologies "naturelles" des biduals (voir Introduction). D'autre part, comme $\varphi_n = \varphi_{n+1} \circ u_n$, où u_n est l'application identique de E_n dans E_{n+1}, on aura $\varphi_n'' = \varphi_{n+1}'' \circ u_n''$, donc les E_n'' s'identifient à des sous-espaces vectoriels topologiques de E'', formant une suite croissante de sous-espaces. Enfin, la réunion des E_n'' est E''; en effet, si $x \in E''$, x est faiblement adhérent à une partie bornée A de E, or A est partie bornée d'un E_n, d'où résulte aussitôt que $x \in E_n''$. Soit T_l la topologie sur E'' limite inductive de la suite des E_n''. Il est immédiat, par définition même de la topologie limite inductive, que T_l est plus fine que la topologie de bidual. Il n'est pas certain qu'elle lui soit identique. Mais on a l'immédiate

Proposition 6. *Soit E une limite inductive stricte d'une suite de sous-espaces vectoriels E_n. Alors les formes linéaires faiblement continues sur E'' sont celles dont les restrictions aux espaces E_n'' sont faiblement continues.* (Noter que la topologie faible propre de E_n'' est évidemment identique à la topologie induite par E'' faible).

En effet, soit X' une forme linéaire sur E'' dont les restrictions aux E_n'' sont faiblement continues; soit x' la restriction de X' à E, on aura évidemment $x' \in E'$. Montrons que $\langle x, x' \rangle = \langle x, X' \rangle$ quel que soit $x \in E''$. En effet, on voit par continuité faible que ces deux formes en x coincident sur chaque E_n'', donc aussi sur leur réunion E''.

Corollaire 1. *Supposons chaque E_n'' faiblement fermé dans E_{n+1}''. Alors la topologie faible, la topologie naturelle et la topologie de limite inductive T_l sur E'' donnent les mêmes parties bornées.*

En effet, comme la proposition 6 signifie que la topologie faible sur E'' donne les mêmes formes linéaires continues que la topologie limite inductive des E_n'' *faibles*, il suit que les parties bornées sont les mêmes pour ces topologies, et par suite toute partie bornée de E'' faible est contenue dans un E_n'' et bornée dans E_n'' faible, donc aussi bornée dans E_n'' muni de sa topologie de bidual (voir Introduction) donc enfin bornée pour la topologie T_l sur E'' limite inductive des E_n'' (munis de leur topologie de bidual).

COROLLAIRE 2. *Si chaque E_n'' est faiblement fermé dans E_{n+1}'', et si les E_n sont distingués, alors E est distingué.*

C'est une conséquence immédiate du corollaire 1.

Notons que le fait que E_n'' soit faiblement fermé dans E_{n+1}'' signifie en vertu des théorèmes classiques de dualité faible, que l'application canonique de E_{n+1}' sur E_n' est un homomorphisme pour les topologies $\sigma(E_{n+1}', E_{n+1}'')$ et $\sigma(E_n', E_n'')$, à fortiori suffit-il que ce soit un homomorphisme pour les topologies fortes. Compte tenu du théorème 8, on obtient donc la première partie du

THÉORÈME 10. *Soit E un espace localement convexe, limite inductive stricte d'une suite d'espaces localement convexes métrisables distingués. Alors E est distingué, et son dual fort est tonnelé et bornologique.*

Que E soit distingué résulte de ce qui précède; cela signifie aussi que E' fort est tonnelé, fait qui pourra d'ailleurs aussi être regardé comme conséquence du fait que E' fort est bornologique (puisque E' fort est complet). Or, ce dernier résultat peut en effet se démontrer directement, comme conséquence immédiate du théorème 7 et du

LEMME 5. *Soit E un espace localement convexe, limite inductive stricte d'une suite d'espaces E_n, et soit U une partie convexe cerclée de E' qui absorbe les parties équicontinues. Alors il existe un indice n tel que U contienne le polaire $(E_n)^\circ$ de E_n dans E'. Si de plus φ_n est l'application canonique de E' sur E_n', l'ensemble U_n des $x' \in E_n'$ tels que $\varphi_n^{-1}(x') \subset U$ est alors un ensemble convexe cerclé dans E_n' qui absorbe les parties équicontinues.*

(Sous les conditions du théorème 10, il suit donc que U_n est un voisinage de 0 dans E' fort — car E' fort est bornologique en vertu

du th. 7 — donc que $U \supset \varphi_n^{-1}(U_n)$ est un voisinage fort de 0 dans E'). — Si, sous les conditions du lemme, on n'avait $(E_n)^\circ \subset U$ pour aucun n, alors il existerait pour tout n un $x_n' \in (E_n)^\circ \cap \complement U$. Or la suite des nx_n' serait alors équicontinue, car pour tout E_n, la suite des restrictions à E_n serait équicontinue (puisqu'elle finirait même par rester nulle); et d'autre part U n'absorberait pas cette suite, d'où contradiction. Il est alors évident que l'ensemble U de l'énoncé du lemme est convexe cerclé, montrons qu'il absorbe toute partie équicontinue A de E_n'. Mais cela résulte aussitôt du fait que A est contenue dans l'image par φ_n d'une partie équicontinue de E' (voir (5)).

Notons que le théorème 10 et sa démonstration sont valables *chaque fois que les E_n sont des espaces quasi-tonnelés dont les duals forts sont bornologiques: alors E' fort est bornologique et tonnelé.*

Le lemme 5 permet aussi de démontrer facilement la généralisation suivante du théorème 6:

PROPOSITION 7. *Soit E un espace localement convexe limite inductive d'une suite d'espaces métrisables E_n. Alors toute partie convexe cerclée de E' fort qui absorbe les parties bornées, contient une partie convexe cerclée et fermée absorbant les parties bornées. Donc tout ensemble de formes linéaires sur E', uniformément bornées sur toute partie bornée de E', est contenue dans l'adhérence faible d'une partie bornée de E''. De plus, toute partie bornée de E'' est contenue dans un espace E_n''.*

Il suffit d'appliquer le lemme 5 et et le théorème 6.

Voici enfin un cas, un peu trop particulier il est vrai, où le bidual d'une limite inductive s'identifie à la limite inductive des biduals:

PROPOSITION 8. *Soit E un espace localement convexe, limite inductive stricte d'une suite d'espaces normables E_n. Alors la topologie du bidual E'' est identique a la topologie limite inductive des espaces E_n''.*

(5) Cela se démontre comme conséquence immédiate du théorème de Hahn-Banach: Dire qu'une partie A de E' est équicontinue signifie qu'elle est contenue dans le polaire d'un voisinage de 0 dans F, voisinage qu'on peut supposer de la forme $V \cap F$, où V est voisinage convexe cerclé et fermé de 0 dans E. Le théorème de Hahn-Banach exprime alors précisément que A est contenu dans l'image canonique du polaire V° de V dans E'.

Il suffit de montrer que tout ensemble convexe cerclé V dans E'' qui est voisinage de zéro pour la topologie limite inductive T_l, i. e. qui coupe chaque E_n'' suivant un voisinage de zéro, contient le polaire d'une partie fortement bornée de E', i. e. un ensemble convexe cerclé *faiblement fermé* U qui engendre E''. Comme E' fort est un espace du type (F), il résulte d'un théorème de Banach (voir [3], th. 5 qui donne le résultat, U étant convexe) que, pour que U soit faiblement fermé, il suffit que son intersection avec toute partie bornée et faiblement compacte le soit, donc aussi que son intersection avec tout E_n'' le soit. On construit alors par récurrence une suite de voisinages forts *faiblement compacts* U_n dans les E_n'', de telle façon que l'on ait $U_n \subset V$, $U_{n+1} \cap E_n'' = U_n$ pour tout n; il suffira ensuite de poser $U = \bigcup_n^* U_n$. Pour montrer la possibilité de la récurrence, on la suppose faite jusqu'au rang n, et on construira alors U_{n+1} en commençant par prendre un voisinage fort faiblement compact V_{n+1} de 0 dans E_{n+1}'', convexe, cerclé et contenu dans V, et tel que $V_{n+1} \cap E_n'' \subset U_n$, ce qui est évidemment possible. Posons alors $U_{n+1} = \Gamma(U_n, V_{n+1})$, on aura $U_{n+1} \cap \cap E_n'' = U_n$, $U_{n+1} \subset V$, enfin U_{n+1} est faiblement compact, comme enveloppe convexe cerclée de deux ensembles convexes, cerclés et faiblement compacts. La proposition 8 est démontrée.

Corollaire. *Le dual fort d'une limite inductive stricte d'une suite d'espaces normables est un espace* (F) *distingué.*

En effet, le dual de ce dernier est tonnelé. — Mais ce résultat est aussi contenu dans le théorème 5, qui est bien plus général.

Remarque 11. Il y a lieu de se demander si la proposition 8 reste valable pour une limite inductive *généralisée* d'une suite d'espaces normables, ce qui équivaut d'ailleurs à la question: le dual d'un espace (DF) quasi-tonnelé est-il distingué, ou encore: son bidual est-il tonnelé? Il est d'ailleurs facile de se ramener au cas où l'espace est complet. Notons que la réponse est affirmative si les parties bornées de H sont métrisables (voir § 3, remarque 13), et qu'il semble plausible d'autre part que les parties bornées d'un espace (DF) quasi-tonnelé soient toujours métrisables (ce qui serait une réciproque du th. 5).

II. Exemples divers

1. Un espace (F) non distingué

M. G. Köthe a donné un exemple très simple d'un espace E du type (F) *dans le dual duquel la topologie forte n'est pas bornologique,* il en résulte, compte tenu du théorème 7, que E *n'est pas distingué.* Nous reproduisons cette construction avec la permission de M. G. Köthe, en modifiant légèrement son raisonnement pour obtenir même *une forme linéaire sur E', bornée sur les parties bornées, et qui n'est pas fortement continue*; il revient au même de dire, d'après le th. 6, corollaire 2, *qu'il existe dans E'' une partie bornée qui n'est pas faiblement relativement compacte.*

Soit E l'espace "échelonné" construit sur l'ensemble d'indices $N \times N$ (N = ensemble des entiers > 0) défini par la suite des suites doubles $a^{(n)}$, où on pose

$$a_{ij}{}^{(n)} = \begin{cases} j \text{ si } i \leq n \\ 1 \text{ si } i > n \end{cases}$$

i. e. l'espace des suites doubles (x_{ij}) dont le produit par chaque $a^{(n)} = (a_{ij}{}^{(n)})$ est une suite sommable, espace muni de sa topologie naturelle d'espace (F). Soit C_n la partie bornée de E', ensemble des (x_{ij}') tels que $|x_{ij}'| \leq a_{ij}{}^{(n)}$ pour tout (i, j), les homothétiques des C_n forment une famille fondamentale de parties bornées de E' (vérification facile; pour la théorie des espaces échelonnés de Köthe, voir [10]). — Pour tout "indice de ligne" i_o, et toute suite (k_i) de nombres entiers positifs, soit $M(i_o, (k_i))$ l'ensemble des indices (i, j) tels que $i > i_o$, $j \geq k_i$. Ces ensembles $M(i_o, (k_i))$ forment manifestement une base de filtre Φ dans l'ensemble $N \times N$, et pour tout $(x_{ij}') = x' \in C_n$, il existe un $M \in \Phi$ tel que $|x_{ij}'| \leq 1$ pour $(i, j) \in M$. Il en résulte que, si Ψ est un ultrafiltre plus fin que Φ, alors pour tout $x' = (x_{ij}') \in E'$, $\lim x_{ij}' = \varphi(x')$ existe et si $x' \in C_n$, on a $|\varphi(x')| \leq 1$. D'autre part, $\varphi(x')$ est évidemment une forme linéaire sur E', comme limite faible de formes linéaires (savoir les formes coordonnées), c'est donc une forme linéaire bornée sur les parties bornées de E'. Montrons que φ n'est pas fortement continue, i.e. qu'il n'existe pas de voisinage fort V de zéro dans E'

tel que $|\varphi(x')| \leq 1$ pour $x' \in V$. On peut supposer que V est l'adhérence faible d'un ensemble $\Gamma_n \epsilon_n C_n$, où les ϵ_n forment une suite de nombres >0 arbitraire. Comme $\Gamma_n \epsilon_n C_n \supset \Sigma_n(\epsilon_n/2^n)C_n$ (le symbole $\Sigma_n A_n$ désignant l'ensemble des sommes finies d'éléments pris resp. dans des A_n d'indices distincts) on peut aussi supposer que V est l'adhérence faible d'un ensemble $\Sigma_n \alpha_n C_n$ (en posant $\alpha_n = \epsilon_n/2^n$). Mais pour chaque n, soit k_n un entier assez grand pour que l'on ait (e_{nj}' désignant l'élément de E' dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf celle suivant (n, j) qui est égale à 1) $2e_{nj}' \in \alpha_n C_n$ pour tout $j \geq k_n$ (c'est possible, il suffit que l'on ait $2 \leq \alpha_n k_n$) et soit $x_n' = 2 \Sigma e_{nj}'$ (somme faible pour $j \geq k_n$). On a $x_n' \in \alpha_n C_n$, d'autre part la série $\Sigma_n x_n'$ converge faiblement dans E', car les sommes partielles restent dans l'ensemble faiblement compact $2 C_1$ et la série converge suivant chaque coordonnée (donc, sur en ensemble total de E). La somme x' de cette série est alors dans V, comme limite faible d'une suite dans $\Sigma_n \alpha_n C_n$, et d'autre part on aura $\varphi(x') = 2$, ce qui démontre notre assertion.

Compte tenu de la proposition 4, on voit de plus que, si on considère E comme plongé dans le produit topologique F d'une suite d'espaces de Banach (qu'on peut d'ailleurs prendre tous isomorphes à l'espace l^1 des suites sommables) alors *la topologie forte du dual de E n'est pas identique a la topologie quotient de F' fort. La topologie quotient donne même un dual strictement plus grand*, car, cette topologie étant bornologique puisque F' fort est bornologique (comme somme directe topologique d'espaces de Banach), les formes linéaires continues pour cette topologie sont exactement les formes linéaires bornées sur les parties bornées de E', formes qui peuvent n'être pas continues pour la topologie de dual fort.

2. Contre exemples divers relatifs aux espaces (LF)

L'exemple suivant, qui généralise et simplifie une construction de G. Köthe ([9], § 5) nous donnera un grand nombre de contre exemples relatifs aux espaces (LF). — Soit I un ensemble d'indices, on considère des espaces de fonctions à valeurs complexes définies sur I, qui contiennent toutes les fonctions qui s'annulent en dehors d'un ensemble fini d'indices. Deux tels espaces E, E' seront con-

sidérés comme mis en dualité, si quels que soient $x \in E$, $x' \in E'$, la série $\Sigma_i x_i x_i'$ est absolument convergente, et on pose alors $<x, x'> = \Sigma_i x_i x_i'$. Soient alors (E, E'), (λ, λ') et (μ, μ') trois couples de tels espaces en dualité, on suppose que l'on ait

$$1) \quad E = \lambda \cap \mu \qquad 2) \quad E' \supset \lambda' + \mu' \qquad 3) \quad E' \neq \lambda' + \mu'.$$

Considérons l'application linéaire u: $x \to (x, x)$ de E dans le produit $F = \lambda \times \mu$ (F étant identifié à un espace de fonctions sur un ensemble d'indices J produit de I par un ensemble à deux indices $\{0, 1\}$, et mis en dualité avec l'espace de suites sur J: $F' = \lambda' \times \mu'$). Cette application est faiblement continue en vertu de 2). Son image U est l'ensemble des éléments (x, x) avec $x \in E$, on a donc pour tout indice i et tout $(y, z) \in U$: $y_i = z_i$, et comme y_i et z_i sont des formes linéaires continues du couple $(y, z) \in F$ (puisque λ' et μ' contiennent les formes coordonnées), la relation subsiste pour les éléments adhérents à U, d'où suit aussitôt que U est fermé (en vertu de 1)). u est donc une application linéaire faiblement continue et biunivoque de E sur un sous-espace faiblement fermé U de F. Sa transposée u' est donc un homomorphisme faible de F' sur un sous-espace faiblement dense V de E', *distinct de* E' (ce dernier point étant en effet exprimé par 3), car on vérifie aussitôt que u' est l'application $(y', z') \to y' + z'$). Supposons maintenant que E' soit un espace métrisable pour la topologie τ (E', E); comme tout homomorphisme faible d'un espace localement convexe, muni d'une topologie du type τ, dans un espace localement convexe métrisable, est un homomorphisme fort (voir [3], page 92), u' sera aussi un homomorphisme pour les topologies τ. Nous allons sous ces conditions noter certains faits, d'aspect pathologique quand on les compare aux propriétés connues des espaces (**F**), et qu'on prend par ailleurs pour E, λ, μ des espaces de type encore assez simple.

Montrons d'abord qu'on peut choisir les données de telle sorte que F et F' soient des espaces (**LF**) réflexifs séparables, E' étant un espace (**F**) réflexif séparable dont le dual fort est un espace (**LF**). Pour ceci, prenons $I = N \times N$ (N = ensemble des entiers naturels) et adoptons les notations suivantes: si α est un ensemble de suites

sur N, on désigne par $\Pi\,\alpha$ (resp. $\Sigma\alpha$) l'espace de toutes les suites *doubles* dont toutes les lignes sont dans α (resp. et dont un nombre fini de lignes seulement sont non nulles). Ces espaces s'identifient respectivement à un produit ou à une somme directe d'espaces tous identiques à α, dépendant d'un indice parcourant N. Si α et α' sont en dualité comme il a été expliqué plus haut, il en est de même de $\Pi\,\alpha$ et de $\Sigma\alpha'$. Si α' est un espace (F) pour la topologie $\tau\,(\alpha', \alpha)$, et si on munit $\Sigma\alpha'$ de la topologie de somme directe topologique, son dual s'identifie précisément à $\Pi\,\alpha$, il suit que la topologie $\tau\,(\Sigma\alpha', \Pi\alpha)$ est précisément la topologie somme directe, donc une topologie d'espace (LF). On voit de la même façon que si α est un espace (F) pour la topologie $\tau\,(\alpha, \alpha')$, alors $\tau\,(\Pi\,\alpha, \Sigma\alpha')$ n'est autre que la topologie forte produit des topologies des espaces facteurs α, $\Pi\,\alpha$ est donc un espace (F). — Soient alors trois couples d'espaces de suites sur N en dualité, (α, α'), (β, β') et (γ, γ'), α' étant un espace (F) pour $\tau\,(\alpha', \alpha)$. Posons

$$E = \Sigma\alpha, \qquad \lambda = \Sigma\beta\,, \qquad \mu = \Pi\,\gamma, \qquad F = \lambda \times \mu$$

$$E' = \Pi\,\alpha', \qquad \lambda' = \Pi\,\beta', \qquad \mu' = \Sigma\gamma', \qquad F' = \lambda' \times \mu\,'$$

On vérifie aussitôt que $\lambda \cap \mu = \Sigma\beta \cap \gamma$, et $\lambda' + \mu' \subset \Pi\,(\beta' + \gamma')$ et que par suite les conditions 1), 2) et 3) envisagées plus haut sont verifiées dès que l'on a

$$1')\quad \alpha = \beta \cap \gamma \qquad 2')\quad \alpha' \supset \beta' + \gamma' \qquad 3')\quad \beta' \neq \alpha'$$

Enfin, E' sera automatiquement un espace (F). — Ici, la condition 3') sur α', β' apparait comme nettement moins stricte que la condition 3) imposée directement à E', λ', μ' et nous pouvons facilement satisfaire à ces nouvelles conditions en prenant trois couples d'espaces de Banach en dualité, par exemple

$$\beta = L^p\,(N) \qquad \alpha = \gamma = L^r\,(N)$$

$$\beta' = L^q(N) \qquad \alpha' = \gamma' = L^s\,(N)$$

$$\text{avec } 1/r + 1/s = 1/p + 1/q = 1,\ 1 < r < p < +\infty$$

Alors $\lambda \times \mu$ et $\lambda' \times \mu'$ sont, pour leur topologie τ, des espaces réflexifs et séparables du type (LF), sommes directes d'espaces du type (F).

Nous allons maintenant, des conditions générales envisagées au début, déduire les conséquences pathologiques annoncées, et le choix précédent permettra en particulier d'avoir des contre exemples correspondants dans le cas d'espaces du type (**LF**), réflexifs et séparables.

1.°) Le quotient de F', muni de sa topologie τ, par le sous-espace fermé U° est non complet, car isomorphe à un sous-espace non fermé de E'. En particulier, *un espace quotient d'un espace du type* (**LF**) *réflexif peut n'être pas complet, et à fortiori n'être pas un espace* (**LF**).

2.°) Il existe dans F'/U° (isomorphe à un sous-espace non fermé d'un espace (**F**)) des ensembles bornés non faiblement relativement compacts, ce quotient n'est donc pas réflexif, bien que F' puisse être choisi complètement reflexif; et de même le sous-espace fermé U de l'espace complètement réflexif F n'est pas complètement réflexif, puisque son dual fort n'est pas réflexif.

De plus, supposant F' réflexif, il existe des parties bornées de F'/U° qui ne sont pas contenues dans l'image canonique d'une partie bornée de F' (autrement elles seraient toutes faiblement relativement compactes), *et le dual fort de ce quotient ne s'identifie donc pas au sous-espace U de F muni de la topologie induite par la topologie forte de F.* — En particulier, un espace quotient d'un espace (**LF**) réflexif peut n'être pas réflexif, et un sous-espace vectoriel fermé d'un espace (**LF**) réflexif peut n'être pas complètement réflexif; ce sous-espace ne peut donc être du type (**LF**), puisqu'il n'est pas tonnelé. On le voit encore d'une autre façon:

3.°) Le dual du sous-espace U de F muni de τ (U', U), est non complet (car isomorphe à F'/U° avec la topologie quotient de la topologie τ de F'). *Il peut donc exister, dans un espace* (**LF**) *réflexif, un sous-espace fermé qui n'est pas du type* (**LF**), *son dual n'étant pas même complet.*

Soit maintenant $x' \in E' \cap \complement V$, il définit une forme linéaire non continue $\tilde{x}'$ sur U, dont les restrictions aux parties bornées de U sont pourtant faiblement continues, $\tilde{x}'$ étant en effet limite, uniforme sur les parties bornées de U, de formes linéaires continues,

(noter que $\tilde{x}'$ appartient au complété de U' fort). Le noyau de $\tilde{x}'$ est donc un sous-espace non fermé de F dont l'intersection avec toute partie bornée et fermée est fermée. Cela nous donne, à deux points de vue différents:

4.°) *Un sous-espace d'un espace du type* (LF) *réflexif peut couper les sous-espaces du type* (F) *suivant des fermés, sans être fermé.*

5.°) *Dans le dual d'un espace* (LF) *réflexif, il peut exister un sous-espace non fermé dont l'intersection avec tout ensemble faiblement compact soit faiblement compacte.* A fortiori, *la topologie T de la convergence compacte du dual n'est pas la plus fine des topologies induisant sur les parties bornées la topologie faible.*

6.°) On peut trouver une application linéaire continue d'un espace (LF) réflexif sur un sous-espace fermé d'un espace (LF) réflexif, et qui ne soit pas un homomorphisme faible. On peut trouver un homomorphisme faible et fort d'un espace (LF) réflexif sur un sous-espace *non fermé* d'un espace (F) réflexif.

On peut construire, sur le modèle précédent, des contre exemples portant sur d'autres classes remarquables d'espaces. Ainsi, une construction où F' soit un espace (LM) (i. e. un espace (LF) du type (M)) s'offre assez aisément, on voit même que F' peut être choisi isomorphe à une somme directe infinie dénombrable de produits topologiques infinis dénombrables de n'importe quel espace de suites χ, sous réserve que χ ne soit pas identique à l'espace ω de *toutes* les suites; E' étant précisément isomorphe à ω. (En particulier, on pourra alors prendre pour χ un espace (F) du type (M), et F' sera un espace du type (LM)). — Pour le voir, reprenons les conditions 1'), 2'), 3') envisagées plus haut, mais en supposant que les espaces sur lesquels elles portent soient des espaces de suites *doubles*, ce qui ne change évidemment rien aux considérations faites. Si alors χ est un espace de suites simples, désignons par $\Pi'\chi$ resp. $\Sigma'\chi$, l'espace des suites doubles dont toutes les *colonnes* sont éléments de χ (resp. et dont un nombre fini seulement de colonnes sont non nulles); ces espaces se déduisent canoniquement des espaces analogues $\Pi\chi$ et $\Sigma\chi$ par symétrie autour de la diagonale dans l'ensemble d'indices $N \times N$, et ce qui a été dit pour

ces derniers se transpose évidemment mot à mot. Posons alors pour un couple en dualité quelconque (χ, χ')

$$\beta = \Sigma\chi', \qquad \gamma = \Sigma'\chi', \qquad \beta' = \Pi\chi, \qquad \gamma' = \Pi'\chi$$

On constate immédiatement que $\alpha = \beta \cap \gamma = \varphi\,(N \times N)$ (ensemble des suites doubles dont un nombre fini de coordonnées seulement sont non nulles) on peut donc prendre $\alpha' = \omega\,(N \times N)$, ensemble de *toutes* les suites doubles, α' est un espace (F) du type (M), et toutes les conditions voulues sont vérifiées pourvu que $\chi \neq \omega\,(N)$. Alors, sur l'expression $F' = \Pi\,\beta' \times \Sigma\gamma'$, on voit que F' est isomorphe à une somme directe dénombrable de produits topologiques dénombrables d'espaces tous identiques à χ.

Signalons aussi qu'au N° suivant nous construirons entre autres *un sous-espace vectoriel fermé d'une somme directe topologique d'une suite d'espaces de Hilbert, qui ne soit pas un espace* (LF). Voici enfin des considérations très simples qui donnent un grand nombre d'exemples d'espaces quotients d'espaces (LF), qui ne soient pas des espaces (LF). Si E est un espace (F) quelconque, il est isomorphe à un sous-espace vectoriel d'un espace F qui est produit topologique d'une suite d'espaces de Banach F_i. Sous des conditions convenables (par exemple si les F_i sont réflexifs, plus généralement si E est distingué — voir th. 8 —) on peut donc affirmer que le dual fort de E s'identifie à un espace quotient de F' fort. Or F' fort est isomorphe à la somme directe topologique $\Sigma_i F_i'$ des espaces F_i', donc E' est isomorphe à un quotient d'une limite inductive stricte d'espaces de Banach. Mais on peut choisir les données facilement de sorte que E' fort ne soit pas un espace (LF), il suffit par exemple qu'il existe dans E' fort une partie bornée telle que l'espace vectoriel qu'elle engendre soit dense (en supposant de plus que E' fort n'est pas du type (F), c'est à dire E non normable). Ainsi, l'espace (E) de L. Schwartz construit sur le segment (0, 1) est isomorphe à un sous-espace vectoriel d'un produit d'espaces de Hilbert ([6]) et dans son dual existe une partie bornée totale (p. ex.

l'ensemble des masses ponctuelles $+1$ placées aux divers points du segment), l'espace qu'elle engendre est fortement dense puisque (E) est réflexif. Par suite, *un espace quotient d'une somme directe d'une suite d'espaces de Hilbert peut n'être pas un espace* (LF).

3. Parties bornées d'un espace quotient

Soit E un espace localement convexe, F un sous-espace vectoriel fermé. Le dual de l'espace quotient E/F s'identifie vectoriellement à l'orthogonal $F^{\circ} \subset E'$ de F. Dire que la topologie forte de ce dual s'identifie à la topologie induite par la topologie forte de E', est équivalent à dire que toute partie bornée de E/F est contenue dans l'adhérence de l'image canonique d'une partie bornée de E. Si E est réflexif, cela impliquerait donc que E/F le soit. Nous allons voir que cela peut ne pas être le cas même si E est un espace (F) du type (M) (i. e. dont les parties bornées sont relativement compactes). En effet, la construction qui suit donne *un espace E du type* (F) et (M) *dont un espace quotient E/F est isomorphe à l'espace non réflexif l^1 des suites sommables; la topologie forte du dual de E/F n'est donc pas celle induite par la topologie forte de E', ces deux topologies donnant même des duals distincts*; car *la bitransposée de l'application canonique de E sur E/F n'est pas une application de E'' sur $(E/F)''$* (son image étant évidemment E/F). Nous construisons plus généralement, *pour tout p tel que $1 \leq p < +\infty$, un espace E_p du type* (F) *et* (M) *dont un espace quotient E/F soit isomorphe a l'espace l^p des suites de puissance p.ème sommable; on voit donc qu'il existe pour $p > 1$ dans E/F des parties faiblement compactes qui ne sont pas contenues dans l'image canonique d'une partie bornée de E* (car elles seraient alors compactes).

Pour ceci, on considère l'espace "échelonné d'ordre p" E_p sur l'ensemble d'indices $N \times N$ (N ensemble des entiers naturels), défini par les suites doubles $a^{(n)}$ définies par

$$a_{ij}{}^{(n)} = \begin{cases} j^n & \text{si } i < n, \\ i^n & \text{si } i \geq n, \end{cases}$$

i. e. l'ensemble des suites doubles $(x_{ij}) = x$ dont le produit par tout $a^{(n)}$ soit de puissance p.ème sommable, espace muni de sa topologie naturelle d'espace (F). Il résulte alors d'un critère assez fin de G. Köthe ([10], page 324) (7) que E est du type (M). — Le dual E_p' de E_p s'identifie à l'espace des suites doubles $x' = (x_{ij}')$ qui sont majorées en module par le produit d'une $a^{(n)}$ convenable par quelque suite double de puissance q.ème sommable (où $1/p+1/q = 1$).

Désignons par l^p l'espace des suites *simples* de puissance p.ème sommable, son dual s'identifie donc à l^q. Pour tout $x = (x_{ij}) \in E_p$, soit $u_p(x)$ la suite simple donnée par $(u_p(x))_j = \Sigma_i x_{ij}$. Si (y_j') est une suite $\in l^q$, on a $\Sigma_j |y_j' (u_p(x))_j| \leq \Sigma_{ij} |y_j' x_{ij}|$, et comme la suite double $u_p'(y')$ donnée par

$$(1) \qquad (u_p'(y'))_{ij} = y_j'$$

est manifestement $\in (E_p)'$, d'où $\Sigma_{ij} |y_j' x_{ij}| < +\infty$, on voit que $\Sigma_j |y_j' (u_p(x))_j| < +\infty$. Cela étant vrai pour tout $y' \in l^p$, on en conclut que $u_p(x) \in l_p$; et de plus, le calcul précédent donne aussitôt, pour $x \in E$, $y' \in l^q$

$$< u_p(x), y' > = < x, u'_p(y') >$$

d'où suit que l'application linéaire $x \to u_p(x)$ de E_p dans l^p est continue, et a pour transposée l'application u_p' donnée par (1). Nous allons montrer que u_p est même un *homomorphisme* de E_p *sur* l^p, ce qui justifiera les assertions du début de ce N.° — Il revient au même de dire que u_p' est une application *biunivoque* de l^q sur un sous espace *faiblement fermé* de $(E_p)'$ (voir [3], th. 7). La biunivocité est immédiate sur l'expression (1). D'autre part, toute suite double (x_{ij}') dans l'image de l^q par u_p' est évidemment constante suivant i. Mais la réciproque est vraie, car cela implique, puisque $x' = (x_{ij}')$ est majorée en module par le produit d'une $a^{(n)}$ par une suite double de puissance q.ème sommable, que sur la ligne d'indice $i = n$ (ligne sur laquelle $a^{(n)}$ est constante) x_{ij}' doit être de puissance q.ème sommable, d'où résulte aussitôt que x' est de la forme $u_p'(y')$. Comme l'espace des $x' \in (E_p)'$ qui sont

(7) M. Köthe n'énonce son théorème que pour $p = 1$. La *généralisation* à p quelconque n'offre pas de difficulté, et est traité par J. Dieudonné et A. Pereira Gomes dans C.R. t. 230, pp. 1129-1130, 1950.

constantes suivant chaque colonne est évidemment faiblement fermé, la démonstration est achevée.

F désignant le noyau de u_p dans $E = E_p$, il est facile de voir que *même sur la "boule unité" B de $F^\circ \subset E'$, les deux topologies fortes ne coincident pas.* Autrement, il existerait un voisinage fort V de 0 dans E' tel que $V \cap B \subset 1/2\, B$, d'où on déduirait aussitôt $V \cap F^\circ \subset B$, donc que la topologie induite sur F° par la topologie forte de E' est plus fine que celle définie par la boule B, ce qui n'est pas.

On peut aussi noter que, la boule unité de l^p étant séparable, il existe une suite bornée de formes linéaires sur F°, continues pour la topologie induite par E' fort, mais non équicontinue pour cette topologie. Ainsi, *F° est un sous-espace d'un espace du type* (**DF**) *tonnelé et bornologique et du type* (**M**), *sans être lui-même du type* (**DF**) *ni tonnelé ni bornologique* (voir remarque 2 après le théorème 2).

A partir du contre exemple précédent, on peut en déduire d'autres en appliquant la proposition suivante:

PROPOSITION 9. *Soit G un espace localement convexe métrisable, F un sous-espace vectoriel fermé tel que sur son polaire $F^\circ \subset G'$, les deux topologies fortes naturelles coincident (resp. donnent le même dual). Si E est un sous-espace vectoriel distingué de G contenant F, la même assertion sera valable pour le couple (E, F).*

Démonstration Soient E°, F° les polaires de E, F *dans* G' ($E^\circ \subset F^\circ$). E' s'identifie *vectoriellement* à G'/E°, et le polaire de F *dans* E' au sous-espace F°/E° de $E' = G'/E^\circ$. Par hypothèse, les deux topologies fortes sur F° — topologie induite par G' fort, et topologie du dual fort de G/F — sont identiques (resp. donnent le même dual), il en est donc de même de leur quotient par E°. La première T_1 de ces topologies quotient est aussi la topologie induite sur F°/E°, considéré comme sous-espace de G'/E°, par la topologie quotient de la topologie forte de G' par E°; or, E étant distingué, cette topologie sur G'/E° est aussi la topologie du dual fort de E (th. 8) de sorte que *T_1 est précisément la topologie sur F°/E°, polaire de F dans $E' = G'/E^\circ$, induite par E' fort.* La deuxième topologie

quotient T_2 sur F°/E° est la topologie quotient de la topologie forte sur F° du dual fort de G/F; or $G/F \supset E/F$, et le polaire de E/F dans le dual F° de G/F s'identifie à E°; par suite, *T_2 est plus fine que la topologie T_2' du dual fort F°/E° de E/F.* Donc, d'après l'hypothèse sur T_1 et T_2, T_1 est plus fine que T_2' (resp. donne un dual plus grand que T_2'). Mais d'autre part, il est vrai en toute généralité que T_2' est plus fine que T_1 (et en particulier donne un dual plus grand que T_1). Il suit que $T_1 = T_2'$ (resp. que T_1 et T_2' donnent le même dual) *cqfd.*

Nous avons construit au début de ce N° un couple (F, E) d'un espace $E = E_p$ du type (**F**) et (**M**) (E est donc distingué) et d'un sous-espace fermé F, tel que sur l'espace orthogonal de F dans E, les deux topologies fortes soient distinctes (et, si $p=1$, ne donnent pas le même dual). Si alors on "plonge" E dans un espace G du type (**F**) quelconque, il résulte de la proposition qui précède que sur l'orthogonal de F *dans* G', les deux topologies fortes seront distinctes, et donneront même, si $p = 1$, des duals distincts. Par exemple, comme E est un espace "échelonné d'ordre p", on voit immédiatement que E_p est isomorphe à un sous-espace d'un produit topologique dénombrable d'espaces tous isomorphes à l^p. Par suite, pour $1 \leq p < +\infty$, *il existe un sous-espace vectoriel F de l'espace $G = \Pi\, l^p$, produit d'une suite dénombrable d'espaces tous isomorphes à l^p, tel que sur le polaire F° de F dans G, les deux topologies fortes soient distinctes, et, si $p = 1$, donnent même des duals distincts.* D'ailleurs, F peut être choisi du type (**M**).—Comme le dual fort de G s'identifie à une somme directe Σl^q d'une suite d'espaces tous isomorphes à l^q, on voit donc que *la topologie induite sur le sous-espace fermé F° par l'espace* (**LF**) $G' = \Sigma l^q$ (*somme directe d'une suite d'espaces l^q*) *est distincte de la topologie limite inductive naturelle sur F°, et donne même, pour $p = 1$, un dual distinct* (cette dernière topologie est en effet à priori encore plus fine que la topologie de dual fort de G/F). En prenant, pour $p = 1$, une forme linéaire sur F° continue pour cette dernière topologie, mais non pour la topologie induite, on trouve *un sous-espace N non fermé de l'espace* (**LF**) $G' = \Sigma l^\infty$, *dont l'intersection avec tout sous-espace du type* (**F**)

est fermée. Cela redonne donc des contre exemples pour des problemes déjà résolus au N.° 2, mais ce-fois ci avec des sommes directes d'espaces de Banach (et même d'espaces de Hilbert pour le premier). Notons encore que toute partie bornée de G' étant contenue dans une somme H d'un nombre fini de facteurs l^∞ de Σl^∞, il en résulte aussitôt que sur toute partie bornée de F°, les deux topologies fortes (topologie induite et topologie de dual fort) coincident, car sur $H \cap F^\circ$ ces deux topologies sont évidemment identiques (elles sont toutes les deux normées). L'espace N précédent nous donne alors l'exemple d'un *sous-espace non fermé du dual fort de l'espace* $G = \Pi\, l^1$ *dont l'intersection avec toute partie bornée et fermée est fermée.* A fortiori, *la topologie forte de* G' *n'est pas la plus fine des topologies induisant sur les parties bornées la topologie forte* (voir remarque 5 après le th. 3).

Au lieu de plonger l'espace E_p dans un espace Πl^p, on pourrait le plonger aussi dans l'espace $C(I)$ des fonctions continues sur l'intervalle ouvert (0,1), muni de la topologie de la convergence compacte, car il est facile de vérifier que tout espace (F) séparable est isomorphe à un sous-espace vectoriel de $C(I)$ (8). On voit donc que dans $C(I)$ existe un sous-espace vectoriel fermé F tel que les deux topologies fortes sur son polaire F° soient distinctes, et donnent des duals distincts.

Dans ce qui précède, nous avons vu qu'un espace quotient d'un espace (F) réflexif (et même du type (M) peut n'être pas réflexif. Il est pourtant possible de délimiter des cas assez usuels où il n'en est plus ainsi, en introduisant la

DÉFINITION 2. *Un espace localement convexe E est dit totalement réflexif, si tout espace quotient de E par un sous-espace vectoriel fermé F est réflexif.*

(8) En effet, il est facile de voir que tout espace (F) séparable est isomorphe à un sous-espace d'un produit d'une suite d'espaces de Banach séparables E_i. Comme tout espace de Banach séparable est isomorphe à un sous espace vectoriel de l'espace E_0 des fonctions continues sur le segment *compact* (0,1), on peut supposer tous les E_i isomorphes à E_0. Enfin, il est facile de plonger ce produit dans C (I) en considérant une suite (K_i) $(i = \ldots -1, 0, 1, 2, \ldots)$ de segments compacts dans I, disjoint deux à deux et s'accumulant en 0 et 1, en identifiant chaque E_i à C (K_i) et E à l'espace des fonctions continues sur l'espace localement compact $M = \cup K_i$; enfin C (M) se plonge dans C (I) en prolongeant chaque $f \in$ C (M) par linéarité dans les intervalles ontigusc aux K_i.

On fera attention que cette définition n'implique nullement que pour tout sous-espace vectoriel fermé F, les deux topologies fortes sur F^o coincident, mais seulement qu'elles donnent le même dual. Ainsi, nous avons vu que même si E est l'espace E_p construit plus haut, ou l'espace $\Pi\ l^p$, les deux topologies fortes sur F^o peuvent être distinctes, tandis que ce qui suit montrera que E_p et $\Pi\ l^p$ sont pourtant totalement réflexifs pour $p > 1$. On notera aussi que bien que E_p soit un espace du type (M) et totalement réflexif, il possède un quotient qui n'est pas un espace du type (M). — L'intérêt de la définition 2 réside dans la

PROPOSITION 10. *Un espace quotient, un sous-espace vectoriel fermé d'un espace totalement réflexif est totalement réflexif. Un espace $E = \Pi\ E_i$, produit topologique d'une suite d'espaces E_i tel que le produit d'un nombre fini d'entre eux soit totalement réflexif est totalement réflexif.*

La vérification des deux premières affirmations est immédiate, car le quotient d'un quotient de E est isomorphe à un quotient de E, et un quotient d'un sous-espace vectoriel fermé de E est isomorphe à un sous-espace vectoriel fermé d'un quotient de E. Pour la dernière assertion, il faut montrer que si F est un sous-espace vectoriel fermé de $E = \Pi\ E_i$, alors toute forme linéaire φ sur F^o qui est continue pour la topologie de dual fort provient d'un élément de E/F *i.e.* est continue pour la topologie faible induite par E' faible. Cela revient aussi à dire que son noyau $\varphi^{-1}(0)$ est un sous-espace *faiblement fermé* de E', ou encore, d'après un résultat fin de Banach (voir [3], th. 5) que l'intersection de cet espace avec toute partie faiblement compacte A est faiblement compacte. Mais E' étant la somme directe topologique des E_i', A est contenu dans la somme directe $H' = E_1' + \ldots + E_n'$ d'un nombre fini des E_i', de sorte qu'on est ramené à montrer que $\varphi^{-1}(0) \cap H'$ est faiblement fermé. Mais en introduisant l'espace $F^o \cap H'$, qui est sous-espace faiblement fermé de H', donc polaire dans H' d'un sous-espace vectoriel fermé $F_1 \subset H = E_1 + \ldots + E_n$, on est ramené, puisque H est totalement réflexif par hypothèse, à montrer que la forme $\tilde{\varphi}$ sur $F^o \cap H'$, restriction de φ à cet espace, est continue pour la

topologie forte de F° considéré comme dual de H/F. Mais H/F s'identifie visiblement à $E/\overline{F+G}$, où G est le produit des E_i pour $i > n$, et il en résulte aussitôt que la topologie forte du dual de H/F sur $F^\circ \cap H'$ est plus fine que la topologie induite par la topologie de F° considéré comme dual fort de E/F, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE. *Tout sous-espace vectoriel fermé et tout espace quotient d'un produit d'une suite d'espaces de Banach réflexifs est totalement réflexif.*

En effet, un espace de Banach réflexif est évidemment totalement réflexif. — Il résulte par exemple aussitôt du corollaire que *les espaces* (D_{LP}) de L. SCHWARTZ [12], t. 2) *sont totalement réflexifs.* — Un autre critère intéressant de totale réflexivité, et redonnant ce résultat sera donné avec le th. 11 du § 3, N.° 3. Il n'est pas certain que le produit de deux espaces (F) totalement réflexifs soit totalement réflexif.

4. Sur l'insuffisance des suites convergentes dans un dual d'espace (F)

L'utilisation du théorème de Hahn-Banach permet, dans de nombreuses questions d'Analyse, d'affirmer qu'un certain élément x' du dual E' d'un espace vectoriel localement convexe E est faiblement adhérent à un sous-espace vectoriel donné V de E', sans qu'il soit avéré par là qu'il existe une partie bornée de V à laquelle x' soit faiblement adhérente, ni à fortiori que x' soit limite faible d'une suite extraite de V, (ce qui revient d'ailleurs au même si E est tonnelé et séparable). En fait, même si E est un espace de Banach aussi simple que l'espace c_0 des suites qui tendent vers zéro, Banach a montré ([1],) qu'il existe dans son dual des sous-espaces vectoriels V dont l'adhérence faible n'est pas identique à l'ensemble des limites faibles des suites extraites de V. On peut seulement dire que tout point *fortement* adhérent à V est limite forte (et à fortiori limite faible) d'une suite extraite de V, pourvu qu'on suppose p. ex. E normable (donc son dual fort métrisable); en particulier, si E est un espace de Banach *réflexif*, comme alors

l'adhérence faible d'un sous-espace vectoriel V de E' est identique à son adhérence forte, tout élément de l'adhérence faible de V est même limite forte (et à fortiori faible) d'une suite extraite de V. Mais nous allons voir que rien de cela ne subsiste dès que E est un espace (F) non normable, de façon précise, on a la

PROPOSITION 11. *Soit E un espace* (F) *qui n'est ni normable, ni isomorphe à un produit topologique d'une suite de droites ni isomorphe au produit de deux tels espaces. Alors il existe dans le dual E' un sous-espace vectoriel V et un point x' fortement adhérent à V qui ne soit contenu dans l'adhérence faible d'aucune partie bornée de V — à fortiori, qui ne soit limite faible d'aucune suite extraite de V. Si (K_i) est une suite fondamentale de parties bornées de E', et si M_i désigne le sous-espace vectoriel engendré par K_i, on peut même supposer que x' ne soit faiblement adhérent à aucun des ensembles $V \cap M_i$.*

L'hypothèse signifie qu'on peut trouver dans E' une suite fondamentale croissante (K_i) $(i = 0, 1 \ldots)$ de parties bornées telles que M_i soit de codimension infinie dans M_{i+1} pour tout i (9). On peut évidemment supposer alors M_o de dimension infinie.

On peut alors dans chaque M_i $(i > 0)$ trouver une suite $(e_j^{(i)})_{j \geq 1}$ convergeant fortement vers 0, formée d'éléments linéairement indépendants modulo M_{i-1}. En effet, pour i donné, on construit les $e_j^{(i)}$ par récurrence, de telle façon que l'on ait $e_j^{(i)} \in (1/j)\, K_i$, et que $e_j^{(i)}$ n'appartienne pas à l'espace vectoriel engendré par M_{i-1} et $e_1^{(i)}, \ldots e_{j-1}^{(i)}$. Soit de même $(e_j)_{j \geq 0}$ une suite d'éléments linéairement indépendants dans M_o, tendant fortement vers 0. Posons pour $i \geq 1$ $a_j^{(i)} = e_o + e_i + e_j^{(i)}$, et soit V l'espace vectoriel engendré par les $a_j^{(i)} (i \geq 1)$, W son adhérence forte. On a, pour tout i, $e_o + e_i = \text{lim. forte } a_j^{(i)}$, d'où $e_o + e_i \in W$, puis $e_o = \text{lim. forte } (e_o + e_i)$, d'où $e_o \in W$. Mais

(9) Cela est évidemment suffisant; c'est aussi nécessaire, autrement il existerait un K convexe cerclé faiblement compact dans E' tel que $M = C.K$ soit de codimension dénombrable dans E': soit alors (e'_i) une base d'un supplémentaire de M, u l'application $x \longrightarrow (\langle x, e'_i \rangle)$ de E dans R^I, v une application linéaire continue de E dans un espace de Banach F telle que ${}^t v$ soit un isomorphisme vectoriel de F' sur M, enfin w l'application $E \longrightarrow R^I \times F = P$ définie par u et v. Alors ${}^t w$ est un isomorphisme vectoriel de P' sur E', donc w est un isomorphisme faible donc fort de E sur P, donc E est isomorphe à P, *cqfd.*

montrons qu'on peut choisir les $e_j^{(i)}$, e_i de telle façon que e_o ne soit adhérent à aucun ensemble $M_n \cap V$. Comme les $a_j^{(i)}$ sont linéairement indépendants par construction, tout $x' \in M_n \cap V$ est de la forme $x' = \Sigma_{ij} \lambda_j^{(i)} a_j^{(i)}$ avec $i \leq n$. Supposons que l'on sache que, si L_n designe l'espace vectoriel faiblement fermé engendré par les $e_j^{(i)}$ avec $i \leq n$, et N_n l'espace engendré par $e_o, e_1, \ldots e_n$, il existe une projection *faiblement continue* p_n de E' sur N_n qui s'annule sur L_n. Si alors $x' = \Sigma_{i \leq n} \lambda_j^{(i)} a_j^{(i)}$ tendait faiblement vers e_o, il faudrait que $p_n x'$ tende faiblement vers e_o dans l'espace de dimension finie N_n; or $p_n x' = \Sigma_{i \leq n} \lambda_j^{(i)} (e_o + e_i)$ est une combinaison linéaire des $e_o + e_i$ $(1 \leq i \leq n)$, et l'ensemble de ces combinaisons linéaires est un sous-espace vectoriel de N_n ne contenant pas e_o, ce qui impliquerait une contradiction.

Montrons donc que l'on peut construire les e_i, $e_j^{(i)}$ de telle façon que les projections p_n existent en effet pour tout n. Pour ceci, on commence par prendre $e_o \neq 0$ arbitrairement dans M_o, puis on construit par récurrence simultanée les suites $(e_i, e_1^{(i)}, \ldots e_j^{(i)} \ldots)$ et les projecteurs faiblement continus p_i, pour $i = 1, 2, \ldots$, de telle façon que à chaque échelon (de rang n) de la récurrence, on ait

1) $e_i \in (1/i) K_o$ pour $1 \leq i \leq n$; $e_o, e_1, \ldots e_n$ lin. indépendants

2) $e_j^{(i)} \in (1/j) K_i$ pour $1 \leq i \leq n$; $e_1^{(i)}, \ldots e_j^{(i)} \ldots$ lin. indépendants mod. M_{i-1}

3) $p_n(e_j^{(i)}) = 0$ si $1 \leq i \leq n$; $p_n(e_i) = e_i$ si $0 \leq i \leq n$

4) $L_n \cap M_o$ est de codimension infinie dans M_o.

Pour cela, on commence par prendre $e_1 \in K_o$ non proportionnel à e_o, on prend une projection faiblement continue arbitraire p_1 de E' sur l'espace engendré par e_o et e_1 et on construit par récurrence la suite d'éléments $e_j^{(1)}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ *linéairement indepéndants mod.* M_o et une suite de *formes linéaires faiblement continues* φ_j *sur* E', *linéairement indépendantes sur* M_o, *de telle façon que l'on ait* $\varphi_j(e_k^{(1)}) = 0$ *pour tout* j *et tout* k, *et* $p_1(e_j^{(1)}) = 0$ *pour tout* j. Supposons en effet ces deux suites construites jusqu'au rang k en satisfaisant à ces conditions, on commence alors par prendre une forme linéaire faiblement continue φ_{k+1}, égale à 0 sur $e_1^{(1)}, \ldots e_k^{(1)}$, et à 1 sur un point

arbitrairement choisi appartenant à l'intersection de M_o et des noyaux de $\varphi_1, \ldots \varphi_k$, (intersection non nulle car M_o est de dimension infinie), puis on prend $e = e_{k+1}^{(i)} \in M_1$ tel que l'on ait $p_1(e) = 0$, $\varphi_\alpha(e) = 0$ pour $\alpha = 1, \ldots k+1$, e n'appartenant pas, de plus, à l'espace engendré par M_o, $e_1^{(1)}, \ldots e_k^{(1)}$; un tel e existe manifestement, M_o étant de codimension infinie dans M_1, et il satisfait alors bien aux hypothèses de récurrence voulues. e_o, e_1 et les suites $(e_j^{(1)})$ et (φ_j) étant ainsi construits, on vérifie immédiatement que les conditions 1), 3) et 4) sont vérifiées pour $n = 1$ (la condition 4) résultant de ce que $L_1 \cap M_o$ est contenu dans l'intersection des noyaux des formes faiblement continues φ_j). De plus, en multipliant les $e_j^{(1)}$ par des scalaires convenables, on peut aussi satisfaire à 2).

Supposons alors les suites p_i, $(e_i, e_1^{(i)}, e_2^{(i)} \ldots)$ construites pour $i = 1, \ldots n$, conformément aux conditions 1) à 4), on voit alors immédiatement qu'on peut continuer d'un rang par la méthode précédente: on commence par prendre $e_{n+1} \in 1/(n+1)\, K_o$, e_{n+1} non dans l'espace engendré par $L_n \cap M_o$ et N_n (possible en vertu de 4)), il existe alors une projection faiblement continue p_{n+1} de E' sur l'espace N_{n+1} engendré par $e_o, \ldots e_{n+1}$, qui s'annule sur L_n, car $L_n \cap \cap N_{n+1} = \{0\}$ (on a déjà en effet $L_n \cap N_n = \{0\}$ à cause de l'existence de p_n). On construit ensuite par récurrence les deux suites $(e_j^{(n+1)})$ et $(\varphi_j)_{j \geq 1}$ où: $e_j^{(n+1)} \in (1/j)\, K_{n+1}$, $p_{n+1}(e_j^{(n+1)}) = 0$, les e_j^{n+1} linéairement indépendants mod. M_n; les φ_j étant des formes linéaires faiblement continues sur E', nulles sur L_n et sur tous les $e_j^{(n+1)}$ $(j \geq 1)$ et ayant des restrictions à M_o linéairement indépendantes. La possibilité de cette construction est assurée grâce à 4) et au fait que M_n est de codimension infinie dans M_{n+1}.

Bien entendu, dans les deux premiers cas qu'exclut l'énoncé de la proposition 11, E normable ou E isomorphe à un produit topologique de droites, tout point fortement adhérent à un sous-espace vectoriel V de E' est en effet limite d'une suite fortement convergente extraite de E'. Dans le deuxième cas, cela résulte en effet du fait que *tout* sous-espace vectoriel de E' (somme directe topologique d'une suite de droites) est fermé !

III — Espaces quasi-normables et espaces de Schwartz

1. Généralités sur les espaces quasi-normables

G. W. Mackey a introduit dans les espaces vectoriels localement convexes un type renforcé de convergence ([13], voir aussi G. Köthe [10]); nous dirons qu'une suite (x_i) dans E converge vers zéro "au sens de Mackey", s'il existe une partie bornée A de E et une suite de nombres $\lambda_i > 0$ tendant vers 0 tels que l'on ait $x_i \in \lambda_i A$ pour tout i; en d'autres termes, il doit exister un suite de nombres $\lambda_i > 0$ tendant vers 0, telle que x_i/λ_i reste borné. Une telle suite tend manifestement vers 0 au sens usuel, mais la réciproque est inexacte en général. Elle est vraie pourtant dans des cas particuliers importants. Posons la

Définition 3. *Soit E un espace localement convexe. On dit que E satisfait à la condition de convergence de Mackey, si toute suite qui converge vers 0, converge vers 0 au sens de Mackey. On dit que E satisfait à la condition de convergence de Mackey stricte, si pour toute partie bornée A de E, il existe une partie bornée, convexe cerclée et fermée $B \supset A$ telle que la topologie induite par E sur A soit identique à la topologie induite par l'espace normé $\mathbf{C}.B$ engendré par B, muni de la norme définie par la "boule" B.*

La seconde de ces conditions entraine la première. Un sous-espace vectoriel d'un espace qui satisfait à l'une des deux conditions de convergence de Mackey y satisfait aussi.

Si A et B sont deux parties convexes cerclées et bornées de E, $A \subset \mathbf{C}.B$, la topologie induite sur A par E est à priori moins fine que la topologie induite par $\mathbf{C}.B$ muni de la norme définie par la "boule" B; pour qu'elle lui soit identique, il faut et il suffit que pour tout $\lambda > 0$, existe un voisinage V de 0 dans E tel que $V \cap A \subset (\lambda B) \cap A$, soit $V \cap A \subset \lambda B$, cela en vertu du fait, bien connu, souvent commode, et de vérification triviale

Lemme 5. *Une topologie localement convexe T' sur un espace localement convexe E induit sur une partie convexe cerclée A de E une topologie (resp. une structure uniforme) plus fine que celle induite pour la topologie T de E, si et seulement si elle donne un filtre des voisinages de 0 plus fin que T.*

Cela permet de voir facilement que *tout espace localement convexe métrisable E satisfait à la condition de convergence de Mackey stricte.* Si en effet A est une partie bornée convexe cerclée de E, (V_n) une suite fondamentale de voisinages fermés de 0 dans E, on aura $A \subset \bigcap_i \lambda_i V_i$ pour une suite de $\lambda_i > 0$ convenables. Soit (μ_i) une suite de nombres > 0 tels que $\frac{\mu_i}{\lambda_i} \to +\infty$, posons $B = \bigcap_i \mu_i V_i$. Pour tout $\lambda > 0$, soit n tel que $i > n$ implique $\frac{\mu_i}{\lambda_i} > \frac{1}{\lambda}$, i.e. $\lambda \mu_i > \lambda_i$; alors $x \in A$, $x \in V = \bigcap_1^n \lambda\mu_i V_i$ implique $x \in \lambda B = \bigcap \lambda\mu_i V_i$, d'où $A \cap V \subset \lambda B$, ce qui démontre que B satisfait aux conditions de la deuxième partie de la définition 3. — Le même principe de démonstration permet de montrer que *le produit d'une suite finie ou dénombrable d'espaces satisfaisant à l'une déterminée des deux conditions de convergence de Mackey, satisfait à la même condition.*

Si E est le dual fort d'un espace métrisable F, ou plus généralement d'un espace quasi-tonnelé, alors $E = F'$ satisfait à la condition de convergence de Mackey si et seulement si toute suite dans F' qui converge vers 0 fortement, converge vers zéro uniformément sur un voisinage de zéro V dans F (car le polaire d'une partie bornée de F' fort sera un voisinage de 0 dans F). Et F' fort satisfait à la condition de convergence de Mackey stricte, si et seulement si pour toute partie équicontinue A de F', existe un voisinage V de 0 dans F tel que sur A, la topologie forte soit identique à la topologie de la convergence uniforme sur V. — Nous poserons donc la définition suivante, "duale" de la définition 3 dans une certaine mesure:

Définition 4. *Un espace localement convexe E est dit quasi-normable, si pour toute partie équicontinue A de E', existe un voisinage V de 0 dans E tel que la topologie induite sur A par la topologie forte de E' soit identique à la topologie de la convergence uniforme sur V.* (Si E est quasi-tonnelé, cela signifie donc que E' fort satisfait à la condition de convergence de Mackey stricte).

Un espace (**DF**) quasi-tonnelé est donc quasi-normable, puisque son dual fort est métrisable, et satisfait par suite à la condition

de convergence de Mackey stricte. Les espaces (F) les plus usuels sont quasi-normables (voir [12]) mais il existe des espaces (F) du type (M) qui ne le sont pas, comme le montre un exemple de G. Köthe ([10], p. 326) (ce n'est autre que l'espace "échelonné" E_p considéré au début du § 2, N.° 3; que cet espace ne peut être quasi-normable résultera d'ailleurs aussi du théorème 10 de ce §). On vérifie très facilement qu'*un espace quotient d'un espace quasi-normable est quasi-normable*, que *le produit d'une famille quelconque d'espaces quasi-normables est quasi-normable, ainsi que la limite inductive d'une suite d'espaces quasi-normables.* Par contre, un sous-espace d'un espace quasi-normable (par exemple d'un produit d'espaces de Banach) peut n'être pas quasi-normable, puisqu'il existe des espaces (F) non quasi-normables.

Par polarité, le fait que E soit quasi-normable, signifie aussi que pour tout voisinage U de 0 dans E existe un voisinage V de 0 tel que pour tout $\lambda > 0$, on puisse trouver un ensemble borné M tel que $\lambda V \subset \overline{\Gamma}(U, M)$. En effet, en se bornant à U, V et M convexes, cerclés et fermés, et en désignant par A le polaire de U, par B le polaire de V, et par W le polaire de M, la relation écrite signifie aussi que $\frac{1}{\lambda} B \supset A \cap W$ ce qui signifie (lemme 5) puisque les W constituent un système fondamental de voisinages forts de 0 dans E', que sur A (donné), la topologie induite par E' fort est identique à la topologie induite par l'espace normé $\mathbf{C}.B$ (muni de la topologie définie par la boule B), i.e. la topologie de la convergence uniforme sur $V = B^\circ$. D'ailleurs, il est immédiat que dans la condition obtenue, on peut remplacer la relation $\lambda V \subset \overline{\Gamma}(U, M)$ par $\lambda V \subset \Gamma(U, M)$ (U étant ouvert) ou aussi par $\lambda V \subset U+M$ (puisque l'on a $(1/2)(U+M) \subset \Gamma(U, M) \subset U+M$). Divisant enfin la relation obtenue par λ, on obtient le

Lemme 6. *Pour que E soit quasi-normable, il faut et il suffit que pour tout voisinage U de l'origine, existe un voisinage V de l'origine tel que, pour tout $\alpha > 0$, on puisse trouver un ensemble borné M tel que*

$$V \subset \alpha U + M$$

Si E est métrisable, et a par suite un système fondamental dénombrable (V_n) de voisinages de 0, la condition obtenue prend la forme: pour tout entier $n > 0$ existe un entier $m(n)$ tel que pour tout entier $k > 0$, existe un borné $M_{n,k}$ dans E tel que $V_{m(n)} \subset \subset (1/k)\, V_n + M_{n,k}$. En appliquant pour la suite des $M_{n,k}$ le résultat de Mackey suivant lequel il doit exister un ensemble borné fixe M qui les absorbe tous, on trouve la

PROPOSITION 12. *Pour que l'espace localement convexe métrisable E soit quasi-normable, il faut et il suffit qu'il existe dans E une partie bornée M ayant la propriété suivante: Pour tout voisinage U de 0 dans E en existe un autre V tel que pour tout $\alpha > 0$, existe $\beta > 0$ avec*

$$V \subset \alpha\, U + \beta\, M$$

Comme autre conséquence du lemme 6, signalons la

PROPOSITION 13. *Le bidual E'' d'un espace quasi-normable est quasi-normable.*

En effet, un système fondamental de voisinages de 0 dans E'' étant formé des adhérences faibles $\overline{U}$ dans E'' des voisinages U de 0 dans E, il suffit de montrer que pour un tel U, existe un voisinage V de 0 dans E tel que l'on ait, pour $\alpha > 0$, $\overline{V} \subset \alpha\, \overline{U} + M_1$, où M_1 est une partie bornée convenable de E'', dépendant de α. Mais E étant quasi-normable, il existe une partie bornée M dans E tel que $V \subset \alpha\, U + M$; comme l'adhérence faible $\overline{M}$ de M dans E'' est faiblement compacte, $\alpha\, \overline{U} + \overline{M}$ est faiblement fermé dans E'', d'où résulte $\overline{V} \subset \alpha\, \overline{U} + \overline{M}$, on peut donc prendre $M_1 = \overline{M}$.

Si E est quasi-normable, les parties équicontinues de son dual fort sont évidemment métrisables. De même, si H est un espace satisfaisant à la condition de convergence de Mackey stricte, ses parties bornées sont métrisables. Appliquant alors le théorème 5, on obtient la

PROPOSITION 14. *Un espace localement convexe métrisable et quasi-normable est distingué, et son bidual satisfait aux mêmes conditions* (prop. 13). *Un espace H du type* (DF) *satisfaisant à la con-*

dition de convergence de Mackey stricte est quasi-tonnelé, et son dual fort est un espace (**F**) *quasi-normable, donc distingué; donc le bidual de H est un espace* (**DF**) *tonnelé satisfaisant à la condition de convergence de Mackey stricte.*

Remarque 13. Si H est un espace (**DF**) dont les parties bornées sont métrisables (et par suite quasi-tonnelé) on voit facilement, en transformant cette condition deux fois par polarité, que le bidual H'' de H jouit de la même propriété, et est par suite tonnelé. Il en résulte aussi que si E est un espace (**F**) dans le dual fort duquel les parties bornées sont métrisables (ce qui implique donc que E est distingué) alors E'' satisfait à la même propriété. Donc, moyennant une condition de métrisabilité sur les parties bornées de H (resp. de E' fort) moins forte que celle de la proposition 14, et qui semble toujours vérifiée en pratique, la question de la remarque 11 du § 1 se résoud par l'affirmative.

La proposition qui suit permettrait souvent de déduire la condition de convergence de Mackey stricte de la condition de convergence pour les suites:

Proposition 15. *Soit E un espace localement convexe ayant une suite fondamentale de parties bornées, et qui satisfait à la condition de convergence de Mackey (définition 3). Si Φ est un filtre à base dénombrable dans E qui converge vers $x \in E$, alors il existe une partie bornée convexe cerclée $A \subset E$ telle que $A \in \Phi$ (i.e. le filtre Φ est borné) et que la trace de Φ sur l'espace* $\mathbf{C}.A$ *converge vers x au sens de la topologie normé sur* $\mathbf{C}.A$ *définie par la boule A.*

On est immédiatement ramené au cas où $x = 0$. Soit (A_α) une suite fondamentale de parties bornées convexes cerclées et fermées de E, et soit, pour tout α, Φ_α le filtre dont une base est formée des ensembles λA_α $(\lambda > 0)$. Il faut montrer que Φ est plus fin que l'un des Φ_α, ce qui résultera du

Lemme 7. *Soit Φ un filtre à base dénombrable sur un ensemble E, (Φ_α) une suite dénombrable de filtres sur E, supposons que toute suite dans E qui converge suivant Φ converge suivant au moins un des Φ_α. Alors Φ est plus fin qu'un au moins des Φ_α.*

S'il n'en était pas ainsi, on pourrait en effet pour tout α trouver un $V \subset E$, appartenant à Φ_α et non à Φ, donc (Φ étant à base Pénombrable) une suite $x^{(\alpha)} = (x_i^{(\alpha)})$ qui converge suivant Φ et non suivant Φ_α. Montrons qu'on peut alors construire une suite unique (y_i) qui converge suivant Φ, et telle que pour tout α, on puisse en extraire une suite qui coincide avec la suite $x^{(\alpha)} = (x_i^{(\alpha)})$ dont on aurait seulement supprimé un nombre fini de termes. Alors (y_i) convergerait suivant Φ, mais ne convergerait pas suivant aucun des Φ_α, ce qui serait contradictoire. — Reste donc à construire, étant donnée une suite de suites $x^{(\alpha)} = (x_i^{(\alpha)})$ qui convergent suivant Φ, une suite unique (y_i) telle que ci-dessus. Soit en effet (V_n) une base de Φ, pour tout entier $m > 0$, soit n_m le plus petit entier tel que, pour chacune des suites $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(m)}$, tous les termes à partir du rang n_m+1 soient $\in V_m$. Posons $n_0 = 0$, on a $n_0 \leq n_1 \leq \ldots$. Soit alors X_m la suite finie — éventuellement vide — obtenue en juxtaposant les suites $\left[x^{(1)}\right]_{n_{m-1}}^{n_m} \ldots \left[x^{(m)}\right]_{n_{m-1}}^{n_m}$ — où $\left[x^{(i)}\right]_\alpha^\beta$ désigne la suite finie $x_{\alpha+1}^{(i)} \ldots x_\beta^{(i)}$. Tous les éléments de X_m sont $\in V_{m-1}$, donc la suite Y obtenue en mettant bout à bout les X_m converge suivant Φ. De plus, il est immédiat que pour tout α, on peut extraire de Y une suite identique à $x^{(\alpha)}$ dont on aurait seulement supprimé un nombre fini de termes.

Corollaire 1 de la prop 15. *E étant comme ci-dessus, soit M une partie convexe cerclée de E métrisable pour la topologie induite. Alors il existe une partie bornée convexe cerclée fermée A de E telle que $M \subset \mathbf{C}.A$, la topologie de M étant identique à la topologie normée induite par la topologie normée sur $\mathbf{C}.A$ définie par la "boule" A.*

En effet, pour que A soit ainsi, il suffit que le filtre qui a pour base les $(\lambda A) \cap M$ soit moins fin que le filtre des voisinages de 0 sur M (lemme 5).

Corollaire 2. *Soit E un espace localement convexe ayant un système fondamental dénombrable de parties bornées. Pour que E satisfasse à la condition de convergence de Mackey stricte, il faut et*

il suffit qu'il satisfasse à la condition de convergence de Mackey, et que ses parties bornées soient métrisables.

La nécessité est évidente, la suffisance est un cas particulier du corollaire 1. — J'ignore si un espace E ayant un système fondamental dénombrable de parties bornées, peut satisfaire à la condition de convergence de Mackey sans satisfaire aussi à la condition stricte.

2. Relèvement d'une suite convergente de formes linéaires sur un sous-espace

Le fait qu'un espace soit quasi-normable est surtout utile pour l'application suivante (relèvement des suites de formes linéaires convergentes):

PROPOSOTION 16. *Soit E un espace localement convexe, F un sous-espace vectoriel, (x_i') une suite équicontinue de formes linéaires sur F, convergeant fortement vers zéro. Alors, si F est quasi-normable, on peut prolonger chaque forme x_i' en une forme linéaire $\tilde{x}_i'$ sur E de telle façon que la suite des $\tilde{x}_i'$ soit équicontinue et converge vers zéro fortement dans E'. De plus, on peut même supposer que la suite des $\tilde{x}_i'$ tend vers zéro uniformément sur un voisinage de 0 dans F.*

En effet, F étant quasi-normable, il existe un voisinage de 0 dans F tel que la suite x_i' converge vers zéro uniformément sur ce voisinage. Si $V \cap F$ est ce voisinage (V étant un voisinage convexe cerclé fermé de 0 dans E) il existe donc une suite de nombres $\lambda_i > 0$ tendant vers 0 tels que l'on ait $|< x, x_i' >| \leq \lambda_i$ pour tout $x \in V \cap F$. En vertu du théorème de Hahn-Banach, on peut alors prolonger x_i' en une forme $\tilde{x}_i'$ sur E telle que $|< \tilde{x}, x_i' >| \leq \lambda_i$ pour tout $x \in V$, ce qui démontre la proposition.

COROLLAIRE. *Supposons que la topologie d'un espace localement convexe F ait été définie comme la moins fine de celles qui rendent continues les applications f_α d'une famille $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ d'applications linéaires de F dans des espaces localement convexes E_α. Soit (x'_i) une suite équicontinue de formes linéaires sur F, convergeant fortement vers zéro. Alors, si F est quasi-normable, il existe une partie finie J de l'ensemble d'indices A, et pour tout $\alpha \in J$, une suite équicon-*

tinue $(x_i'^{(\alpha)})$ $(i = 1, 2, \ldots)$ *de formes linéaires sur* E_α *convergeant vers zéro uniformement sur un voisinage de* 0, *de telle façon que l'on ait* $x_i' = \Sigma\, x_i'^{(\alpha)} \circ f_\alpha$ *pour tout* i *et* $\alpha \in J$.

Il suffit d'identifier de la façon usuelle F à un sous-espace vectoriel topologique de $E = \Pi E_\alpha$, $\alpha \in A$, et d'appliquer la prop. 16.— C'est sous cette forme qu'est démontrée dans [12] la proprieté de quasi-normabilité pour les espaces (E), (S), $(\mathbf{D}_{L_p})$.

Remarque 14. On aurait aussi pu énoncer la proposition 16 pour un *filtre* équicontinu de formes linéaires sur F, convergeant vers zéro pour la topologie forte: ce filtre est alors image canonique d'un filtre équicontinu de formes linéaires sur E, convergeant fortement vers zéro (et même uniformément sur un voisinage convenable de 0 dans E). Mise sous cette forme, la proposition 16 admet d'ailleurs une réciproque: si, quel que soit l'espace localement convexe E où on "plonge" F (ou seulement pour *un* tel espace E, pourvu qu'il soit quasi-normable — par exemple un espace produit d'espaces de Banach) — l'énoncé précédent est valable, alors F est quasi-normable. — La démonstration en est évidente.

Remarque 15. Dans l'ordre d'idées de la proposition 16, signalons que M. G. Köthe a démontré dans [10], page 335 un résultat remarquable (qu'il n'enoncé que pour ses espaces "échelonnés") et ayant trait au relèvement des suites *faiblement* convergentes de formes linéaires sur un sous-espace. Sous sa forme générale, ce résultat s'énonce ainsi: *Soit* E *un espace localement convexe séparable,* F *un sous-espace vectoriel de* E, (x_i') *une suite équicontinue de formes linéaires sur* F, *convergeant faiblement vers zéro. Alors on peut pour tout* i *choisir un prolongement* $\tilde{x}'_i$ *de* x_i' *à tout* E, *de telle façon que la suite* $(\tilde{x}_i')$ *soit encore une suite équicontinue faiblement convergente de* E'. — L'hypothèse que E soit séparable est d'ailleurs essentielle, même si E est un espace de Banach. Si par exemple E est l'espace l^∞ des suites bornées, muni de sa topologie usuelle, F le sous-espace c_0 des suites qui tendent vers zéro, (x_i') la suite des formes coordonnées sur c_0, il est bien connu qu'il n'existe pas de suites de formes linéaires continues $\tilde{x}_i'$ sur l^∞ prolongeant les x_i', et tendant faiblement vers zéro.

REMARQUE 16. La forme "duale" du problème du relèvement d'une suite de formes linéaires sur un sous-espace vectoriel F de E, convergeant vers zéro pour quelque topologie usuelle, est la suivante: On considère dans un espace quotient H/L d'un espace localement convexe H, une suite (x_i) qui converge vers zéro; est-elle image canonique d'une suite de H qui converge vers zéro? Il est bien connu qu'il en est ainsi lorsque H est métrisable (voir [1]). La proposition 16, et le théorème moins évident de G. KÖTHE rappelé plus haut, permettent de donner d'autres conditions pour que la réponse soit affirmative (par exemple donc, si H est le dual faible d'un espace localement convexe séparable, et la suite envisagée contenue dans l'image canonique d'une partie faiblement compacte convexe cerclée de H). Mais bien entendu, le relèvement en question n'est pas possible en général. Ainsi, il existe des espaces quotients de l'espace de Banach l^1 des suites sommables, et une suite faiblement convergente vers zéro dans le quotient, qui n'est image canonique d'aucune suite faiblement convergente de l^1, comme cela résulte de la conjonction des trois remarques suivantes: *a*) dans l^1, toute suite faiblement convergente est fortement convergente; *b*) tout espace de Banach séparable est isomorphe à un espace quotient de l^1 (voir note ([4])); *c*) il existe des espaces de Banach séparables admettant des suites faiblement convergentes et non fortement convergentes.

3. Quasi-normabilité et faible compacité

Nous aurons besoin d'un lemme.

LEMME 8. *Soit E un espace localement convexe séparé, A une partie bornée, convexe et fermée de E. Pour que A soit faiblement compact, il faut et il suffit que toute famille filtrante décroissante de parties convexes fermées non vides de A ait une intersection non vide.*

La condition est évidemment nécessaire. Pour montrer qu'elle est suffisante, comme A est déjà borné, c'est à dire faiblement précompact, il suffit de montrer que A est complet pour la topologie faible, donc que tout filtre de cauchy Φ sur A ait un point d'adhérence dans A. Or, soit Ψ la base de filtre formée des enveloppes con-

vexes fermées des $B \in \Phi$; il résulte aussitôt de l'hypothèse sur A que Ψ admet un point d'adhérence x dans A qui est un point limite car Ψ est encore um filtre de Cauchy. À fortiori x sera limite de Φ (plus fin que Ψ).

THÉORÈME 11. *Soit E un espace localement convexe quasi-normable, A une partie équicontinue convexe cerclée de E', compacte pour $\sigma(E',E'')$. Alors il existe une partie équicontinue convexe cerclée faiblement fermée $B \supset A$ de E' telle que A soit une partie faiblement compacte de l'espace de Banach* $\mathbf{C}.B$ *(muni de la topologie définie par la "boule B).*

Soit en effet $B \supset A$ une partie équicontinue convexe cerclée faiblement fermée de E' telle que la topologie induite sur A par la topologie forte, ou par $\mathbf{C}.B$, soit la même. Alors les parties convexes fermées de A sont les mêmes pour ces deux topologies. L'application du lemme 8 montre alors immédiatement que A est une partie faiblement compacte de $\mathbf{C}.B$.

COROLLAIRE 1. *Soit u une application linéaire continue d'un espace localement convexe quasi-normable E dans un espace de Banach F, transformant les parties bornées en parties faiblement relativement compactes de F. Alors u est une application faiblement compacte, i.e. il existe un voisinage de l'origine V dans E transformé en une partie faiblement relativement compacte de F.*

En effet, dire que u transforme les parties bornées en parties faiblement relativement compactes signifie que son transposé transforme la boule unité de F' en une partie A de F' compacte pour $\sigma(E', E'')$ (voir lemme 1 du travail cité dans la note ([11])). Soit alors B comme dans l'énoncé du th. 11, soit V le polaire de B dans E. u définit une application linéaire continue $\tilde{u}$ de l'espace normé E_V défini par le voisinage convexe cerclé V de l'origine, il suffit évidemment de prouver que u est une application faiblement compacte. Or le dual de E_V s'identifie manifestement a $C.B$, et l'image de la boule unité de F' par le transposé de u n'est autre que A. Mais alors le lemme envisagé plus haut prouve bien que $\tilde{u}$ est une application faiblement compacte. — Cas particulier du corollaire 1:

COROLLAIRE 2. *Toute application linéaire continue d'un espace quasi-normable réflexif dans un espace de Banach est faiblement compacte.*

Notons que pour un espace réflexif non quasi-normable, même s'il est du type (F) et du type (M), ce corollaire n'est plus valable, puisque un tel espace peut admettre un espace quotient normable et non réflexif (§ 2, N.° 3).

COROLLAIRE 3. *Un espace* (F), *quasi-normable réflexif est totalement réflexif* (§ 2, définition 2).

En effet, cela résulte du th. 11 et du

LEMME 9. *Soit E un espace localement convexe. Les trois conditions suivantes sont équivalentes:*

a. Toute application linéaire continue de E dans un espace de Banach quelconque F est faiblement compacte.

b. Pour tout voisinage convexe cerclé V de l'origine dans E, existe un voisinage convexe cerclé $U \subset V$ de l'origine tel que l'application canonique de l'espace de Banach E_U associé au voisinage U, dans l'espace de Banach E_V associé à V, soit faiblement compacte.

c. Pour toute partie équicontinue convexe cerclée, faiblement fermée A de E', existe une partie équicontinue convexe cerclé faiblement fermée B de E' telle que A soit partie faiblement compacte de l'espace de Banach C.B. défini par B.

Si E jouit de ces propriétés, il en est de même de tout espace quotient et de tout sous-espace vectoriel de E. Si E est de plus complet, E est réflexif. — En particulier, tout espace quotient E/F de E, s'il est séparé et complet, est réflexif.

DÉMONSTRATION. L'équivalence des conditions *a.* et *c.* est incluse dans la démonstration du corollaire 1, et l'équivalence des conditions *a.* et *b.* est immédiate. Il est trivial aussi que la condition *b.* se conserve par passage à un espace quotient ou à un sous-espace vectoriel. Reste à montrer que si E est complet, E est réflexif, i.e. que l'application identique u de E sur lui-même transforme les parties bornées en parties faiblement relativement compactes. En effet, d'après le lemme 1 (déjà utilisé) du travail cité

dans la note ([11]), il revient au même de dire que le transposé ${}^t u$ transforme les parties équicontinues en parties relativement compactes pour $\sigma(E', E'')$, ce qui est une conséquence de la condition *c*. (On pourrait aussi noter que E est isomorphe à un sous-espace vectoriel fermé d'un produit vectoriel-topologique d'une famille d'espaces de Banach, et appliquer la condition *a*.).

Remarquons que tout produit vectoriel-topologique d'une famille quelconque d'espaces ayant la propriété envisagée dans le lemme 9 a la même propriété. On retrouve ainsi le corollaire de la prop. 10 (§ 2).

4. Espaces de Schwartz

PROPOSITION 17. *Soit E un espace localement convexe. Les conditions suivantes sont équivalentes*:

1) *E est quasi-normable, et ses parties bornées sont précompactes.*

2) *Pour tout voisinage U convexe cerclé et fermé de l'origine dans E, il existe un voisinage V de l'origine qui est précompact pour la topologie T_U définie par le voisinage U et ses homothétiques.*

Si E est un espace du type (F) *elles sont équivalentes à*

3) *E est un espace* (M) *séparable, et toute suite dans E' qui converge fortement, converge uniformément sur un voisinage de l'origine dans E* (i.e. E' fort satisfait à la condition de convergence de Mackey).

DÉMONSTRATION. — 1) implique 2). En effet, soit U un voisinage convexe cerclé et fermé de zéro dans E. E étant quasi-normable, il existe (Lemme 6) un voisinage V de 0 tel que pour tout $\alpha > 0$, existe un borné $M \subset E$ tel que $V \subset \alpha U + M$. Or, tout borné étant précompact par hypothèse, on peut trouver un nombre fini de points $x_i \in E$ tels que $M \subset \bigcup_i (x_i + \alpha U)$, d'où $V \subset \bigcup_i (x_i + 2\alpha U)$. α étant arbitraire, cela exprime précisément que V est précompact pour la topologie T_U.

2) implique 1), car E sera quasi-normable (les conditions du lemme 6 se vérifient en effet immédiatement), et toute partie bornée M de E est précompacte; en effet ce dernier point signifie aussi

que M est précompact pour toute topologie telle que T_U, mais si V est un voisinage de 0 précompact pour T_U, comme on aura $M \subset \subset \lambda V$, M sera aussi précompact pour T_U.

Si E est un espace (F), 1) entraine 3). Il suffit de vérifier que E est séparable, c'est à dire, puisque E est métrisable, que E est séparable pour toute topologie T_U, ce qui résulte aussitôt du fait qu'il existe un voisinage V de 0 précompact pour T_U, et à fortiori séparable pour T_u (T_u étant définie par une seule semi-norme).

Enfin, si E est un espace (F), 3) implique 1); en effet, cela revient à montrer que E' fort satisfait à la condition de convergence de Mackey *stricte*. Mais E étant un espace (M), la topologie forte sur une partie bornée de E' est identique à la topologie faible, et E étant séparable, cette dernière est métrisable. Il suffit alors d'appliquer le corollaire 2 de la proposition 15.

J'ignore si dans la condition 3) le fait que E soit séparable peut être omis; il ne semble pas qu'on connaisse un espace (M) du type (F) qui ne soit séparable.

DÉFINITION 5. *On appelle espace de* SCHWARTZ (*en abrégé, espace du type* (S)) *tout espace localement convexe qui satisfait à la condition qui suit: Pour tout voisinage convexe cerclé et fermé U de 0 dans E, il existe un voisinage V de 0 qui est précompact pour la topologie T_U définie par U et ses homothétiques.* (C'est à dire la deuxième des conditions équivalentes envisagées dans la proposition 17).

La propriété envisagée ici a été mise en évidence par L. SCHWARTZ dans des espaces comme les espaces (E), (S) (voir [12], tomes 1 et 2) sous forme de la condition de convergence de Mackey dans le dual. On notera que la démonstration de cette propriété, à partir de la définition adoptée ici, est beaucoup plus facile. Signalons comme autres exemples l'espace des fonctions holomorphes sur une variété analytique complexe donnée, muni de la topologie de la convergence compacte, qui est aussi du type (S), comme sous-espace vectoriel topologique de l'espace (E) des fonctions indéfiniment différentiables muni de sa topologie usuelle (voir prop. 18). La

notion d'espace (S) semble surtout intéressante pour les espaces du type (F) (voir th. 11), mais signalons aussi les espaces suivants du type (S). Tout espace muni d'une topologie faible est un espace (S); le dual fort d'un espace (M) métrisable est un espace (S) (car nous avons déjà dit que le dual fort d'un espace (F) est quasi-normable, de plus ici, ses parties bornées sont relativement compactes). — Si E est un espace (M) métrisable, nous avons vu qu'il peut n'être pas quasi-normable, de sorte que parmi les espaces du type (F), les espaces (S) forment une classe effectivement plus restreinte que les espaces (M).

La classe des espaces du type (S) a, relativement aux opérations usuelles, une stabilité remarquable, exceptionnelle parmi la plupart des classes importantes d'espaces vectoriels:

PROPOSITION 18. *Un espace quotient ou un sous-espace vectoriel topologique d'un espace du type* (S) *est du type* (S). *Le produit d'une famille quelconque d'espaces du type* (S) *est du type* (S). *Une limite inductive d'une suite d'espaces du type* (S) *est du type* (S).

La vérification est immédiate pour sous-espace, quotient, produit, il suffit d'appliquer la définition. Pour une limite inductive *stricte* d'une suite d'espaces du type (S), on se sert de la condition 1) de la proposition 17: la condition que toute partie bornée soit précompacte est évidemment vérifiée, et d'autre part nous avons déjà dit qu'une limite inductive d'une suite d'espaces quasi-normables est quasi-normable. Le cas d'un espace E limite inductive générale d'une suite d'espaces du type (S) (voir définition après le théorème 9) se ramène au précédent, car E sera espace quotient d'une somme directe d'une suite d'espaces du type (S) (voir démonstration du théorème 9).

La proposition 18 montre en particulier qu'un sous-espace d'un espace E du type (S) est quasi-normable, alors qu'on sait qu'un sous-espace d'un espace quasi-normable peut n'être pas quasi-normable. De même, le quotient d'un espace (F) du type (S) est réflexif et même du type (M), alors qu'on sait qu'un quotient d'un espace du type (F) et (M) peut ne pas être même réflexif. On a même ici le

THÉORÈME 12. *Soit E un espace* (S) *métrisable et complet, F un sous-espace vectoriel fermé. Alors F et E/F sont des espaces* (S), *et leurs duals forts s'identifient respectivement à E'/F° et à F°, ces espaces étant munis respectivement de la topologie quotient et la topologie induite de E' fort. Toute partie bornée de E/F est contenue dans l'image canonique d'une partie compacte de E.*

Que E et E/F soient du type (S) a été dit dans la proposition 18. L'identification de F' fort avec E'/F° est bien connu dès que E est réflexif (voir [3]). Pour démontrer l'identité des deux topologies fortes sur F°, il suffit de démontrer la dernière assertion du théorème. Or, E/F étant un espace du type (S) complet, toute partie bornée de E/F est relativement compacte, or il est bien connu que toute partie compacte dans un espace quotient d'un espace E du type (F) est contenue dans l'image canonique d'une partie compacte de E (le fait est vrai, et se démontre de façon "straightforward", indépendamment de toute structure vectorielle chaque fois que l'on a un espace quotient d'un espace *métrisable* par une relation d'équivalence *ouverte*).

Mais on fera attention que dès que l'espace E du type (S) n'est plus métrisable, mais par exemple un espace (LF) du type (S) (i.e. une limite inductive stricte d'une suite d'espaces (S) métrisables complets) il n'est plus vrai en général que sur F°, les deux topologies fortes coincident. On a vu en effet à la fin du N° 2 du § 2, que dans toute somme directe E d'un produit direct d'espaces tous identiques à un même espace de suites χ (qu'on peut choisir du type (S)), existe un sous-espace F pour lequel la propriété envisagée est en défaut, — pourvu que χ ne soit pas isomorphe à un produit topologique de droites.

QUESTIONS NON RÉSOLUES

Voici un rappel des questions non résolues rencontrées au cours du texte:

1) Une partie bornée du complété $\hat{E}$ d'un espace localement convexe métrisable E est-celle contenue dans l'adhérence dans $\hat{E}$

d'une partie bornée de E? (On le sait si E est séparable — th. 1, cor. 5 —).

2) La topologie forte du dual d'un espace E du type (F) est elle identique à $\tau(E', E'')$? Si les formes linéaires sur E' bornées sur les parties bornées sont fortement continues, E' fort est-il tonnelé, i.e. E distingué?

3) Le théorème 6 et le théorème 7 (qui en est conséquence) sont-ils valables pour tout espace H du type (DF) (pas forcément un dual fort d'espace (F))? En particulier, si H est quasi-tonnelé, H est-il bornologique?

Rappelons qu'on ne connait pas d'exemple d'espace quasi-tonnelé H non bornologique, ni même de forme linéaire sur un espace localement convexe H, qui soit bornée sur les parties bornées, et qui ne soit faiblement adhérente, dans le dual algébrique de E, à une partie fortement bornée de H'.

4) Si E est un espace (F) distingué, les parties bornées de E' fort sont-elles métrisables? Plus généralement, la réciproque du théorème 5 est-elle valable?

5) Le dual fort d'un espace H quasi-tonnelé du type (DF) est-il distingué, i. e. le bidual tonnelé? En est il ainsi si H est déjà le dual fort d'un espace E du type (F), i. e. le bidual d'un espace (F) distingué est-il distingué? — La réponse serait affirmative si celle de 4) l'était (voir remarques 11 et 13).

6) Soit E un espace localement convexe, F un sous-espace vectoriel fermé. Les deux topologies fortes sur E'/F° donnent-elles les mêmes parties bornées? (Voir remarque 10 après le théorème 8).

7) Soient E et F deux espaces (F), $B(E, F)$ l'espace des formes bilinéaires continues sur $E \times F$, muni de la topologie de la convergence uniforme sur le produit de deux parties bornées variables de E et F. $B(E, F)$ est-il un espace du type (DF)? Plus généralement, si E est du type (F), H du type (DF), l'espace $L(E, H)$ des applications linéaires continues de E dans H est-il du type (DF) pour la topologie de la convergence bornée? Il serait déjà inté-

ressant de le savoir si E ou H est normable. (Voir fin du N.° 4 du § 1).

8) Le bidual d'une limite inductive stricte E d'une suite d'espaces localement convexes E_n s'identifie-t-il à la limite inductive des biduals? Est-ce vrai si les E_n sont des espaces (F), ou des espaces (F) distingués? (J'avais annoncé oralement ce dernier résultat, mais ne retrouvant pas la démonstration, il y avait peut-être erreur). E'' est-il complet? (C'est vrai si les E_n sont des espaces (F) distingués, puisqu'alors E' fort est bornologique — théorème 10).

9) Le produit de deux espaces totalement réflexifs (définition 2, N.° 3 du § 2) du type (F), est-il totalement réflexif?

10) Un espace (M) métrisable est-il séparable?

De toutes ces questions, la question 7 me semble la plus importante.

Signalons encore que pour un bon nombre des propriétés des espaces du type (DF) vues dans ce travail (savoir l'essentiel du § 1 N.° 4), des hypothèses moins strictes que celle qui interviennent dans la définition des espaces (DF) seraient suffisantes notamment la suivante: *H admet un système fondamental dénombrable de parties bornées, et toute suite fortement convergente de son dual est équicontinue.* La classe d'espaces ainsi définie a en outre l'intérêt d'être stable par passage à un *sous-espace vectoriel fermé* aussi bien que par passage à un espace quotient.

NOTE AJOUTÉE PENDANT LA CORRECTION DES ÉPREUVES. — L. Nachbin a construit un espace tonnelé complet non bornologique, et J. Dieudonné m'a communiqué la démonstration d'une réponse affirmative à la question 10). Il ne semble pas qu'il y ait eu d'autres progrès dans la solution des questions ci-dessus.

Bibliographie

1. S. Banach, *Théorie des opérations linéaires,* Varsovie (1932).
2. N. Bourbaki, *Sur certains espaces vectoriels topologiques,* Annales de l'Institut Fourier, t. 2 (1950), pp. 5-16.
3. J. Dieudonné et L. Schwartz, *La dualité dans les espaces* (**F**) *et* (**LF**), Annales de l'Institut Fourier, t. 1 (1949), pp. 61-101.
4. A. Grothendieck, *Quelques résultats relatifs à la dualité dans les espaces* (**F**), Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t. 230 (1950), pp. 1561-1563.
5. A. Grothendieck, *Sur une notion de produit tensoriel topologique.* Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t. 233 (1951), pp. 1556-1558.
6. A. Grothendieck, *Critères généraux de compacité dans les espaces fonctionnels,* American Journal of Mathematics, t. 74 (1952), pp. 168-186.
7. A. Grothendieck, *Sur la complétion du dual d'un espace localement convexe,* Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t. 230 (1950), pp. 605-606.
8. A. Grothendieck, *Sur certains espaces de fonctions holomorphes,* Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, Bd 192, p. 35-64 et p. 77-95, 1953.
9. G. Köthe, *Die Quotientenraume eines linearen vollkommenen Raumes,* Mathematische Zeitschrift, t. 51 (1947), pp. 17-35.
10. G. Köthe, *Die Stufenräume, eine einfache Klasse linearer vollkommener Räume,* Mathematische Zeitschrift, t. 51 (1948), pp. 317-345.
11. G. Köthe, *Dualität in der Funktionentheorie,* Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, t. 192, 1953.
12. L. Schwartz, *Théorie des distributions,* t. 1 & 2, Actualités Scientifiques et Industrielles, n°s. 1091 & 1122, Paris (1950-1).
13. G. W. Mackey, *On infinite-dimensional linear spaces,* Transactions of the American Mathematical Society, t. 57 (1945), pp. 155-207.

Instituto de Matemática Pura e Aplicada
Conselho Nacional de Pesquisas