Letter of Alexander Grothendieck dated 03.04.1984: Reflections on GAL$(\overline{\mathbb{Q}}_2, \mathbb{Q}_2)$,

Volker Diekert

University Stuttgart, Formal Methods in Informatics, 70569 Stuttgart, Germany

July 2021

The following letter of Grothendieck is written in German. It is about an important open problem in algebraic number theory. The question is whether it is possible to determine the structure of the absolute Galois group GAL$(\overline{\mathbb{Q}}_2, \mathbb{Q}_2)$ in a similar way as it it was solved by Jannsen and Wingberg in [3] for GAL$(\overline{k}, k)$ for $\mathfrak{p}$-adic fields whenever $p \neq 2$. The case of $p = 2$ is open to date. The motivation to publish the letter of Grothendieck is to draw, perhaps, the attention to that puzzling problem.

Myself, I wrote my PhD-thesis on this subject for $p = 2$ under direction of Jürgen Neukirch in 1983. I followed the roadmap of [3], but I could determine the structure of GAL$(\overline{k}, k)$ for a dyadic field k only if k contained the 4-th root of the unity. Thus, the structure of GAL$(\overline{\mathbb{Q}}_2, \mathbb{Q}_2)$ was known for a subgroup of index 2, only. My results are published in [1]. I sent a reprint of my paper to Grothendieck; and he became interested in the subject. He was optimistic that one can solve the remaining case; and he suggested an approach from a more general viewpoint. His letter contains some outline of that. I discussed the letter with my friends Jannsen and Wingberg, but, in spite of Grothendieck's suggestions, the work on that problem did not advance.

Actually, the structure I found was the same as it was found earlier by Zelvenskiĭ in [5,6]. His approach was quite different and based on previous work of Jakovlev [2]. However, according to [3], there are several mistakes in [2].

In 2016 Franziska Schneider investigated GAL$(\overline{\mathbb{Q}}_2, \mathbb{Q}_2)$ again in her PhD-thesis under direction of Uwe Jannsen [4]. She was able to reprove the results in [5,6] in detail and without relying on [2]. Moreover, she established some conjectures. Still, apart from her conjectures the structure of GAL$(\overline{\mathbb{Q}}_2, \mathbb{Q}_2)$ remains a mystery.

The PhD of Franziska Schneider is written in English and freely available on the net. Her thesis contains a detailed introduction citing all relevant earlier works on the subject. Moreover, to the best of my knowledge, her thesis is the state of the art until today, July 12th, 2021.

References

1. V. Diekert. Über die absolute Galoisgruppe dyadischer Zahlkörper. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 350:152–172, 1984.
2. A. V. Jakovlev. The Galois group of the algebraic closure of a local field. *Math. USSR Izv.*, 2:1231 – 1269, 1968.
3. U. Jannsen and K. Wingberg. Die Struktur der Absoluten Galoisgruppe $\mathfrak{p}$-adischer Zahlkörper. *Inventiones mathematicae*, 70:71–98, 1982.
4. F. Schneider. *On the structure of the absolute Galois group of local fields with residue characteristic* 2. PhD thesis, University Regensburg, Dezember 2016.
5. I. G. Zelvenskiĭ. On the algebraic closure of a local field for $p = 2$. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 6:925–937, 1972. Paper based on [2].
6. I. G. Zelvenskiĭ. Maximal extension without simple ramification of a local field. *Math. USSR Izv.*, 13:647 — 661, 1979.

(1)

Les Aumettes den 3.1.84

Lieber Volker Dickert,

Ich möchte heute nur für Ihren Brief danken, und auch für das Weiterleiten der Fragen meines vorigen Briefes an Ky Wingberg und Uwe Jansen. Die Ergebnisse von Ihnen und Jansen und Wingberg sind recht eindrucksvoll, und ich hoffe sehr, dass sie Euch demnächst zu entsprechenden Lehrstellen verhelfen, statt etwa Computer ~~zu~~ füttern zu müssen. Mathematisch hätte ich z.Z. nichts weiter zu Ihrem oder Wingbergs Brief hinzuzufügen oder zu erfragen, ich bin ja ziemlich "draussen" – aber es ist gut möglich, dass in den folgenden

②

Ich nun solches Ergebnisse wär von Nutzen sein können, und ich werde dann etwas hineinkriegen, und dann werde ich auf Thomas und Wingbergs Brief zurückkommen. Ich wäre jedenfalls für jegliche weitere Separate und Preprints dankbar, auch wenn ich keine unmittelbare "Verwendung" dafür in meinen z.Z. laufenden Überlegungen habe.

Vielleicht nur ein Kommentar, zu ihrer Auskunft, dass Sie nicht $G = G(\overline{\mathbb{Q}}_2 / \mathbb{Q}_2)$ kennen. Doch kennen wir sicher die Teilgruppe $G_0 = G(\bar{k}/k)$ des Index 2, $k = \mathbb{Q}_2(\sqrt{-1})$, so dass G als Extension von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ durch die bekannte Gruppe G_0 erscheint. Doch Gruppenextensionen kennen wir sehr häufig

bestimmen! Die ersten Fragen hier wären da wohl:

a) Wie bestimmt man

$$\Theta : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Aut\,ext}(G_0)$$

(also eine gewisse "äussere Involution" $\theta \in \mathrm{Aut\,ext}(G_0)$, $\theta^2 = 1$)?

b) <u>Welches ist das Zentrum von G_0</u>?

Sollte $Z(G_0) = 1$ sein, so gibt es zu gegebenem Θ eine und nur eine entsprechende Isomorphieklasse von Extensionen. Gelingt es also zu denen, Θ d.h. θ zu bestimmen, so wäre damit G gruppentheoretisch vollständig bestimmt. Es sollte mich sehr wundern, wenn man dann nicht auch, mehr oder weniger "automatisch", G durch Erzeugende

und Relationen bestimmen könnte, mit Hilfe der ~~im Go~~ Darstellung von Go, schon behandelten. Das wäre allerdings ein etwas brutaler Weg, und es ist dann auch fraglich, ob man zu so einer einfachen Darstellung gelangt wie in den vorhin behandelten Fällen. Aber falls es gelingen sollte überhaupt eine Darstellung herauszuarbeiten, besser so als gar nichts – und zudem ist es auch immer aufschlussreich, eine selbe Situation aus verschiedenen Sichten zu betrachten.

Mit herzlichen Grüssen, und besten Wünschen auch zu Ihrer Arbeit und "Lernfolgen"

Alexander

(5)

PS Ich frage mich, ob folgende Vermutung bei Thurston (oder Wingberg oder Jannsen etc.) anklingt:

Es sei

$$*) \quad 1 \longrightarrow \pi \longrightarrow G \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 1$$

eine Extension diskreter Gruppen, und es sei:

a) $\pi \simeq$ Fundamentalgruppe einer topologischen Fläche $X \setminus S$, X kompakte orientierbare Fläche, S endliche Teilmenge von X (eine solche Gruppe π soll kurzweg "Flächengruppe" genannt werden);

b) Γ endlich;

c) G hat keine Torsionselemente.

Dann ist vermutet, dass G gleichfalls eine "Flächengruppe" ist.

MB Natürlich können "Flächengruppen"

MB Ich glaube nicht, dass die obige Vermutung wahr ist, bzw. dass die "praktische" Zielsetzung dieser Vermutung wahr ist!!!

rein algebraisch beschreiben werden!
Es ist jedoch auf rein algebraischem
Weg kaum beweisbar (und dennoch
wahr!) dass eine Teilgruppe von
endlichem Index einer Flächen-
gruppe wiederum eine solche ist.

Die Frage, die sich in Beziehung zu
~~[illegible]~~ einem Ergebnissen mir aufdrängt, ist
die, ob für die absoluten Galoisgruppen
"lokaler Körper" sich nicht gleichfalls
eine entsprechende Gattung prachtvoll-
licher Gruppen algebraisch beschreiben
lässt (sie mögen etwa "lokale Flächen-
gruppen" genannt werden), die gleich-
falls "abgeschlossen" ist im selben zwei-
fachen Sinn, wie die Gattung der "Flächengruppen".
Das heisst insbesondere etwas wie: wenn
das Extremum pro endlichem Gruppen ist, Γ
endlich, G torsionsfrei, und wenn π
eine ~~Darstellung~~ Darstellung zulässt "von
der Jensen-Wingberg-Richert Art", so ist
dem ebenso für G selbst.

PPS

Es steigt eine weitere Assoziation auf, zu "lokalen absoluten Galoisgruppen", die Sie vielleicht anspricht. Es geht hier um die "stetige" Struktur lokaler Galoisgruppen, die (so scheint es mir) zum ersten mal von Serre bemerkt wurde, in seiner "geometrischen" Deutung der lokalen Klassenkörpertheorie. Ich weiss nicht, ob dieser Aspekt der Serre-schen Deutung explizit in der Litteratur erscheint, er hat mich aber seinerzeit (aus Unterhaltungen mit ihm) sehr frappiert. Ich will der "Stetigkeit" hier eine Formulierung geben, die auch für nicht abelsche Galoiserweiterungen sinnvoll bleibt, aber meines Wissens nie auf Gültigkeit untersucht oder auch nur niedergeschrieben wurde! Es geht etwa so. Es sei K der Quotientenkörper eines diskreten Valuationsringes A, der vollständig ist mit perfektem Restklassenkörper k der Charakteristik $p > 0$. Für jede perfekte Erweiterung k' von k gibt es dann eine "Erweiterung"

$$A' = A(k')$$

von A, die bis auf eindeutung bestimmten Isomorphismus wohlbestimmt ist, durch die Eigenschaft dass A' gleichfalls ein vollständiger noetherscher lokaler Ring ist, zudem eine "platte" Algebra über A, mit gegebem Isomorphismus von k-Algebren

$$A' \otimes_A k \simeq k' .$$

Dieser Existenz- und Eindeutigkeitssatz gilt für beliebigen noetherschen lokalen ring A mit perfektem Restklassenkörper der Char $p > 0$; ist zudem (wie hier vorausgesetzt) A ein Valuationsring, so ist A' gleichfalls ein solcher. Die A-Algebra $A' = A(k')$ hängt funktoriell von der perfekten Erweiterung k' von k ab, und deshalb auch der entsprechende Quotientenkörper $K' = K(k')$.

Es sei nun G eine beliebige endliche Gruppe, und ich betrachte, für jegliche gegebene k'/k, die Kohomologiemenge

$$H^1(K(k'), G),$$

d.h. die Menge aller Isomorphieklassen von Galoiserweiterungen von $K(k')$ mit gegebenem Isomorphismus der Galoisgruppe mit G. Diese Menge hängt nun, für variable Erweiterung k', kovariant von k' ab. Im Fall (den ich als trivial ausgeschlossen hatte) wo k von der Char. Null ist, lassen sich die $A(k')$ und deshalb auch $K(k')$ definieren, sofern nur ein Representantenkörper von k in A gewählt ist, so dass man $A(k') = A \hat{\otimes}_k k'$ setzen kann. In dem Fall jedoch, und falls wir zudem k, k' algebraisch abgeschlossen nehmen, ist der obige Funktor ein <u>konstanter</u>, und lässt sich durch Kummertheorie leicht beschreiben. Ein entsprechender Satz für Char. null lässt sich gleichfalls beweisen, scheint es mir,

wenn A nicht als Valuationsring vorausgesetzt wird, und wir von einer beliebigen offenen Teilmenge U von Spec(A) ausgehen (etwa $U=\mathrm{Spec}(A_f)$, wo f ein beliebiges Element in rad(A) ist), und wir den Funktoren

$$k' \longmapsto H^1(U_{k'}, G)$$

betrachten, wor $U_{k'}$ das inverse Bild von U in Spec(A(k')) ist. Doch dürfte dieser Satz ein tiefliegender sein, der Schwierige Ergebnisse von Artin aus SGA 4 für "exzellente Ringe" der Char. Null benutzt (die ihrerseits Hironakas Resolutionssätze benutzen).

Mein jetziges Interesse jedoch ist der Fall $p>0$, A diskreter Valuationsring (NB obwohl der allgemeinere Fall mit beliebigem A und gegebenem U gleichfalls sinnvoll bleibt, und zu der gleichen Vermutung führt wie im betrachteten Fall). Die erste wichtige Bemerkung Serre's (schon im Fall $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$) ist die, dass sofern G nicht prim zu p ist, der obige Funktor (für alg. abgeschlossene k,k', um die "arithmetische Struktur" von k,k' auszuschalten) keineswegs ein konstanter ist - je grösser k', desto grösser auch das entsprechende H^1 ! Die hier naheliegende Vermutung ist nun folgende, wo ich k', aber nicht k alg. abgeschlossen voraussetze. Es soll ein k-Schema vom endlichen Typ über k existieren,

$$X = X(A,G)$$

(es hängt von A und G ab) mit einem funktorialen Isomorphismus

$$(*) \qquad X(k') \simeq H^1(K(k'),G) \qquad (k' \text{ alg. abg.}) .$$

NB. Ist G abelsch, so ist X eine (abelsche) Gruppe...

Was die Eindeutigkeit von X anbelangt, so sei bemerkt, dass ein Schema X über einem Körper k keineswegs bis auf Isomorphismus bestimmt ist, wenn man den Funktor $k' \mapsto X(k')$ kennt, wo k' lediglich eine (zudem noch alg. abgeschlossene) Extension von k ist. Jedoch durch weitere Bedingungen auf den Isomorphismus (*) (der in einem gewissen Sinn mit "Spezialisationen" verträglich sein soll) dürfte es nicht schwierig sein, X bis auf radizielle endliche Überlagerung zu bestimmen, so dass eine gewisse "perfekte Hülle" von X jedenfalls kanonisch (bis auf eindeutig bestimmten Isomorphismus) bestimmt ist.

NB Es ist in der Natur der Dinge, wenn $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, dass X nicht bis auf Isom. bestimmt ist, sondern nur bis auf radizielle endliche Überlagerung

Im Fall wo G abelsch ist, lässt sich ein solches X mit der Serreschen Theorie tatsächlich "hinschreiben", und ich bin bereit, wenn nötig nähere Angaben dazu zu machen. Mir schien bisher ein Beweis der Vermutung und eine Bestimmung von X(A,G) ausser Reichweite, da die Struktur der lokalen Trägheitsgruppen ausser Reichweite schien. Die Situation scheint nun aber verwandelt, und mir scheint, es müsste nunmehr möglich sein, dieser Vermutung auf den Zahn zu fühlen. Die ganze Frage-

(9)

stellung allerdings geht in eine Richtung, die Sie vermutlich von den sich selbst gesetzten Zielen (voraussichtlich mit Nachdruck auf "arithmetischen" Fragen) abführen, in mehr "geometrische" Gefilde. Doch ist es vorauszusehen, dass ein Beweis der Vermutung für einen lokalen Körper, und ein Verständnis der Struktur von X=X(G) und/oder dessen Abhängigkeit von G, und A auch zu einem eingehenderen Verständnis der Struktur der entsprechenden absoluten lokalen Galoisgruppe führen muss.

wohl doch z.Z. noch etwas optimistisch aber "auf den Zahn fühlen" müsste möglich sein!

Mit diesen ermunternden Worten will ich nun endlich diesen endlos gewordenen Brief schliessen, mit meinem Dank für geduldiges Lesen !

Alexander

Ich kommen doch noch einmal auf ihren Brief zurück, wo sie sagen, dass σ, τ von einem Schnitt von

$$1 \to V \to Gal(\bar{k}/k) \to \underbrace{G}_{\text{zahmer Teil}} \to 1$$

stammen – aber dann müsste doch die Ordnung von τ prim zu p sein, was Sie aber in den Relationen A) B) C) nicht erwähnen. Oder verstehe ich da etwas falsch? Und wissen Sie, inwieweit der Schnitt bestimmt ist – genauer, wissen Sie, ob zwei Schnitte nicht V-konjugiert sein können?